Konvektion und Pulsationen in A-Sternen und Weißen Zwergen vom Typ DA

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

Vorgelegt von
Bernd Freytag

Kiel
1995

Referent: ....

Koreferent/in: ....

Tag der mündlichen Prüfung: ....

Zum Druck genehmigt: Kiel, den ....

....

Der Dekan

Albrecht Unsöld über die „Konvektion in der Sonnenatmosphäre“:

. . . Ganz allgemein dürfte es in Anbetracht der Mannigfaltigkeit der Sterne (Spektren, Variabilität usw.) im Sinne der Beobachtungen liegen, daß wir in die Theorie des Strahlungsgleichgewichts (welche die einheitlichen Züge des Beobachtungsmaterials darstellt) ein Element eingeführt haben, welches — ich möchte sagen — für größere Abwechslung sorgt.

Albrecht Unsöld, 1930

Inhaltsverzeichnis

0 Zusammenfassung **1**

1 Einleitung **4**
1.1 Allgemeine Bemerkungen 4
1.2 Aufbau der Arbeit 7

2 Realistische Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen **9**
2.1 Problemstellung und Näherungen 9
2.2 Liste der verwendeten Symbole 11
2.3 Strahlungs-Hydrodynamik-Grundgleichungen 16
2.3.1 Hydrodynamik-Grundgleichungen 16
2.3.2 Berücksichtigung von Schocks und Turbulenz 17
2.3.3 Strahlungsaustausch 19
2.3.4 Thermodynamische Relationen 20
2.4 Numerisches Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Problems 25
2.5 Die gerechneten Modelle im tabellarischen Überblick 27

3 Einfache eindimensionale Betrachtungen **37**
3.1 Hydrostatische graue Schichtung 37
3.2 Längenskalen 42
3.3 Typische Geschwindigkeiten 44
3.4 Zeitskalen 46
3.5 Charakteristische dimensionslose Größen 49
3.6 Konvektive Instabilität 55
3.7 Lokales Modell, Rayleigh-Zahl 57

4 Linearisierte Gleichungen **60**
4.1 Herleitung der allgemeinen LAWE 60
4.2 Randbedingungen 64
4.3 Einfache Sonderfälle der LAWE 65
4.3.1 Eindimensionale LAWE 65
4.3.2 Isotherme LAWE 65
4.3.3 Abweichungen von der Isothermie 70
4.4 LAWE und Strahlung 72
4.5 Numerisches Verfahren zur Lösung der LAWE 74

5 Mischungswegtheorie **76**
5.1 Geschichte der Mischungswegtheorie 76
5.2 Grundannahmen der Mischungswegtheorie 77
5.3 Herleitung der lokalen Mischungswegtheorie 78
5.3.1 Die 4 Temperaturgradienten 78
5.3.2 Konvektiver Fluß, konvektive Geschwindigkeit 79
5.3.3 Strahlungsaustausch und Temperaturgradient 80
5.3.4 Die kubische Gleichung 81
5.3.5 Wahl des Mischungsweges 81
5.4 Mischungswegmodelle 82
5.5 Overshoot im Mischungswegbild 82

6 Konvektionsströmungen in Hauptreihensternen und WDs **84**
6.1 Sonne 84
6.2 Kühle Weiße Zwerge vom Typ DA 86
6.3 Hauptreihen-A-Sterne 97

7 Abhängigkeit von numerischen Parametern **107**

8 Dynamik der Konvektion: Zeit- und Größenskalen **115**
8.1 Start einer Konvektionssimulation 115
8.2 Typische Größen- und Zeitskalen 117
8.3 Einschwingzeitskalen 123

9 Struktur und „Grenzen" einer Konvektionszone **126**
9.1 Vertikale Struktur einer Konvektionszone 126
9.2 „Grenzen" einer Konvektionszone 131
9.3 Vergleich: RHD und MLT bei verschiedenen Effektivtemperaturen . . . 138
9.4 Overshoot 145
9.5 Eindimensionale Diffusionsrechnungen 157

10 Konvektion und Pulsationen **162**
10.1 Ein typisches Modenspektrum 162
10.2 Einschwingvorgänge 162
10.3 Wachsende planparallele Schwingungen 164
10.4 Erzeugung von Schallwellen in A-Sternen 165
10.5 Anregung der f-Mode in Weißen Zwergen 168
10.6 Blaue Kante des ZZ Ceti-Instabilitätsstreifens 169

11 Fazit **170**
11.1 Schlußfolgerung 170
11.2 Ausblick 171
11.3 Resümee 172

12 Literatur **173**

Index **183**

13 Danksagung **187**

Abbildungsverzeichnis

1 Temperaturschichtung einer grauen Atmosphäre 38
2 Graue Atmosphäre: Weißer Zwerg mit 12200 K 40
3 Graue Atmosphäre: A-Stern mit 8500 K 41
4 Skalenhöhen: Weißer Zwerg mit 12200 K 43
5 Skalenhöhen: A-Stern mit 8500 K 44
6 Größenordnung der Konvektionsgeschwindigkeit: WZ mit 12200 K . . . 45
7 Größenordnung der Konvektionsgeschwindigkeit: A-Stern mit 8500 K . . 46
8 Strahlungsrelaxationszeiten 48
9 Typische Zeitskalen: Weißer Zwerg mit 12200 K 50
10 Typische Zeitskalen: A-Stern mit 8500 K 51
11 Charakteristische dimensionslose Größen: Weißer Zwerg mit 12200 K . . 55
12 Charakteristische dimensionslose Größen: A-Stern mit 8500 K 56
13 Dispersionsrelation einer isothermen Schichtung 67
14 Strömungsbild: Sonne, $T_{\rm eff} = 5770\,{\rm K}$ 84
15 Strömungsbild: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 14200\,{\rm K}$ 87
16 Strömungsbild: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 13800\,{\rm K}$ 88
17 Strömungsbildsequenz: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 13400\,{\rm K}$ 90
18 Strömungsbild: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ 92
19 Netto-Enthalpiefluß: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ 92
20 Kinetischer Energiefluß: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ 93
21 Ionisationsgrad: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ 93
22 Strömungsbild: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 11800\,{\rm K}$ 94
23 Strömungsbild: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 11400\,{\rm K}$ 94
24 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 13400\,{\rm K}$ . . . 95
25 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ . . . 96
26 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 11400\,{\rm K}$ . . . 96
27 Strömungsbild: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$, $\log g = 4.13$ 99
28 Strömungsbild: A-Stern, $T_{\rm eff} = 9000\,{\rm K}$ 101
29 Strömungsbild: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$ 102
30 Strömungsbild: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$, tief 103
31 Strömungsbild: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8000\,{\rm K}$ 103
32 Strömungsbild: A-Stern, $T_{\rm eff} = 7500\,{\rm K}$ 104
33 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$, $\log g = 4.13$ . . 104
34 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: A-Stern, $T_{\rm eff} = 9000\,{\rm K}$ 105
35 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$ 105
36 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8000\,{\rm K}$ 106
37 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$ 108
38 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$ 110
39 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12000\,{\rm K}$ 111
40 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 11600\,{\rm K}$ 112
41 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 11800\,{\rm K}$ 113
42 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12600\,{\rm K}$ 114
43 Entropie, Geschwindigkeit, Fluß: A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$ 114
44 Strömungsbildsequenz: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ 116
45 Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes ($T_{\rm eff}$): DA Weiße Zwerge 118
46 Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes ($\log g$): DA Weiße Zwerge . . . 119
47 $v(x,t)$: DA Weißer Zwerg, $T_{\rm eff} = 13400\,{\rm K}$ 120
48 Typische Skalen ($T_{\rm eff}$): DA Weiße Zwerge 121

49 Temperaturentwicklung: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 124
50 Temperaturentwicklung: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 13000\,\mathrm{K}$ 125
51 $F(z)$, RHD-MLT: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 127
52 $s(z)$, RHD-MLT: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 128
53 $v(z)$, RHD-MLT: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 128
54 $\log v(z)$, RHD-MLT: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 129
55 $\log v(\log P)$, RHD-MLT: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 130
56 $\log v(\log \tau)$, RHD-MLT: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 130
57 $T(\log \tau)$, RHD-MLT: DA Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ 131
58 Lage der Konvektionszone (z), RHD-MLT: DA Weiße Zwerge 134
59 Lage der Konvektionszone $(\log P)$, RHD-MLT: DA Weiße Zwerge 136
60 Lage der Konvektionszone $(\log \tau)$, RHD-MLT: DA Weiße Zwerge 137
61 Effektives $\alpha(T_{\mathrm{eff}})$: DA Weiße Zwerge 140
62 Effektives $\alpha(\log g)$: DA Weiße Zwerge 141
63 Effektives $\alpha(T_{\mathrm{eff}})$: A-Sterne 144
64 v_{rms} und $v_{\mathrm{g-mode}}$ für DA Weißen Zwerg: 13400 K 147
65 v_{rms} und $v_{\mathrm{g-mode}}$ für DA Weißen Zwerg: 12600 K 148
66 v_{rms} und $v_{\mathrm{g-mode}}$ für A-Stern: 8500 K 149
67 $v_{x,z}(t)$ für DA Weißen Zwerg: 13400 K 151
68 $z_z(x,t)$ für DA Weißen Zwerg: 13400 K 152
69 $z_{\mathrm{rms}}(t)$ für DA Weißen Zwerg: 13400 K 153
70 Diffusionskoeffizient für DA Weißen Zwerg: 13400 K 154
71 Geschwindigkeitsskalenhöhe: DA Weiße Zwerge 156
72 Kalzium-Konzentration für A-Stern: 7943 K 160
73 Titan-Konzentration für A-Stern: 7943 K 161
74 Modenspektrum: Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 13400\,\mathrm{K}$, $\log g = 8.00$ 163
75 Abklingende Schwingungen: A-Stern, $T_{\mathrm{eff}} = 9000\,\mathrm{K}$, $\log g = 3.90$ 164
76 Wachsende Pulsationen: A-Stern, $T_{\mathrm{eff}} = 8500\,\mathrm{K}$, $\log g = 3.90$ 164
77 Erzeugung von Schallwellen: A-Stern, $T_{\mathrm{eff}} = 7500\,\mathrm{K}$, $\log g = 4.40$ 166
78 $v_z(x,t)$ und f-Mode: Weißer Zwerg, $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$, $\log g = 8.00$ 168

Tabellenverzeichnis

1 Elemente und relative Häufigkeiten 27
2 GAS-Routinen 27
3 Opazitätsdateien 28
4 Modelldaten: 1D Wega 29
5 Modelldaten: 1D Wega 30
6 Modelldaten: 1D A0V-F0V 31
7 Modelldaten: 1D A0V-F0V 32
8 Modelldaten: 2D A-Sterne 33
9 Modelldaten: 2D A-Sterne 34
10 Modelldaten: DA Weiße Zwerge ($\geq 11800\,\mathrm{K}$) 35
11 Modelldaten: DA Weiße Zwerge ($\leq 11600\,\mathrm{K}$) 36
12 Typische stellare Längenskalen 42
13 Bereiche einer Konvektionszone 132

0 Zusammenfassung

Das Verständnis stellarer Konvektion und ihre genaue quantitative Beschreibung ist von enormer Bedeutung u.a. für Spektralanalyse, Sternentwicklungs- und Pulsationsrechnungen, sowie für die Deutung vieler magnetischer Prozesse auf der Sonne.

Bisher war man im wesentlichen auf die Aussagen der Mischungswegtheorie nach Böhm-Vitense (1953 und 1958) angewiesen. Der Hauptnachteil dieser phänomenologischen Theorie ist aber, daß man eben die Phänomene, die sie beschreiben soll, nämlich die Konvektion im Sterninneren, praktisch nicht kennt, weil man sie so schlecht direkt beobachten kann. Daß dieser Formalismus trotzdem eine der tragenden Säulen der Theorie des Sternaufbaus werden konnte, liegt zum Einen an seiner Plausibilität, zum Anderen an seiner einfachen Durchschaubarkeit und Anwendbarkeit. Im wesentlichen liegt es aber an dem freien Parameter, den sie enthält und mit dem sich die Effizienz der Konvektion nach Belieben einstellen läßt, so daß die mit Hilfe der Mischungswegtheorie gewonnenen Resultate tatsächlich mit vielen Beobachtungen in Einklang gebracht werden können.

Doch es gibt eine Reihe von Problemen: Der Mischungswegparameter ist keine Naturkonstante, sondern kann oder muß je nach Fragestellung angepaßt werden. Die Mischungswegtheorie beschreibt die Grenzen einer Konvektionszone nicht korrekt, denn sie beinhaltet kein Überschießen der Materie über die instabile Zone hinaus, wie man es aber an der Sonnengranulation beobachtet. Und die Mischungswegtheorie ist keine dynamische Theorie, die es gestatten würde, z.B. die Wechselwirkung mit stellaren Pulsationen zu beschreiben.

Also sucht man nach Verbesserungen. Aber Weiterentwicklungen der Mischungswegtheorie oder Versuche, eine Konvektionstheorie direkt aus den ja wohlbekannten Grundgleichungen abzuleiten, leiden darunter, daß eine ganze Reihe von einschneidenden Annahmen gemacht werden müssen, die man anhand von rein analytischen Abschätzungen oder auch Beobachtungen schlecht verifizieren kann. Zwar hat etwa die Messung und Interpretation der Frequenzen der Sonnenoszillationen und deren Nutzung zur Festlegung der Tiefe der solaren Konvektionszone in den letzten Jahren enorme Fortschritte erzielt. Dasselbe gilt für die Steigerung der Auflösung von Aufnahmen der Sonnengranulation mit Hilfe von Speckle-Methoden. Aber auch dadurch erhält man kein direktes Bild von Struktur und Dynamik der gesamten Konvektionszone sondern nur Hinweise auf Teilaspekte.

Deshalb wird schon seit der Verfügbarkeit leistungsfähiger Computer auf die direkte numerische Integration der Grundgleichungen zurückgegriffen, und auch in meiner Arbeit werde ich diese Methode benutzen. Zwar gibt es schon eine Reihe von numerischen Rechnungen zur Untersuchung von Konvektionsvorgängen. Aber die meisten beschäftigen sich mit Konvektion in irdischem Maßstab oder im Labor oder betrachten hochgradig idealisierte Systeme, so daß die Übertragung der Ergebnisse auf stellare Verhältnisse mit vielen Unsicherheiten behaftet ist. Sehr erfolgreich sind hingegen die numerischen Simulationen der oberen Schichten der Konvektionszone der Sonne (siehe z.B. Nordlund 1985), denn sie vermögen eine ganze Reihe der beobachteten Eigenschaften der solaren Granulation wiederzugeben und gestatten einen „Einblick“ in die Dynamik der darunterliegenden, der Messung sonst unzugänglichen Schichten.

In dieser Arbeit werde ich nun zwei Sequenzen von Strahlungs-Hydrodynamik-Modellen stellarer konvektiver Hüllen vorstellen. Die eine umfaßt die Hauptreihen-A-Sterne im Effektivtemperaturbereich von $T_{\mathrm{eff}} = 7500\,\mathrm{K}$ bis $T_{\mathrm{eff}} = 9500\,\mathrm{K}$, die andere Weiße Zwerge vom Spektraltyp DA im Bereich $T_{\mathrm{eff}} = 11400\,\mathrm{K}$ bis $T_{\mathrm{eff}} = 14200\,\mathrm{K}$. In beiden wächst die Stärke der Konvektion mit fallender Effektivtemperatur, so daß ein großes Ensemble von Modellen mit verschwindend geringer bis extrem effektiver und vehementer Konvektion zur Verfügung steht und für die Untersuchung verschiedenster Prozesse jeweils das bestgeeignete Modell ausgewählt werden kann. Das verwendete, von Matthias Steffen entwickelte, Kieler 2D-Strahlungs-Hydrodynamik-Programm berücksichtigt u.a. Ionisationsprozesse und nichtlokalen, eventuell (dank der Arbeit von Hans-Günter Ludwig) frequenzabhängigen Strahlungstransport unter Verwendung realistischer Opazitäten. Es wurde schon erfolgreich zur Modellierung der äußersten konvektiven Schichten der Sonne und sonnenähnlicher Sterne und der Konvektionszone eines Weißen Zwerges verwendet.

Meine Untersuchung zeichnet sich nun dadurch aus, daß vollständige Sequenzen von Modellen unterschiedlicher Sterntypen und Arten von Konvektionszonen gerechnet wurden, in denen Wert gelegt wurde auf eine möglichst realistische Modellierung der relevanten physikalischen Prozesse. Für den allergrößten Teil der Sterne wurden erstmals solche Simulationen durchgeführt. Es ist jeweils die gesamte Konvektionszone, d.h. die instabile Schicht sowie ausreichend große stabile Pufferzonen, im Simulationsvolumen enthalten. Dadurch werden artifizielle Wechselwirkungen mit den Rändern weitgehend unterdrückt, und es ist möglich, die gesamte Struktur der Konvektionszone einschließlich der Overshoot-Region zu untersuchen. Weiterhin enthalten einige der A-Stern-Modelle erstmals beide Konvektionszonen.

Die dynamischen Eigenschaften der konvektiven Strömungen variieren mit Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung. Aber es gibt doch gemeinsame Merkmale aller Modelle: So zeigt sich immer eine deutliche Asymmetrie zwischen schmalen, schnellen, die gesamte Konvektionszone von oben bis unten durchquerenden Abströmkanälen und Gebieten mit langsam aufwärts strömender Materie (den Granulen auf der Sonne). Die maximale aufwärtsgerichtete Geschwindigkeit findet sich meist in direkter Nachbarschaft der Abströmkanäle und fällt zu größeren Abständen hin ab.

Diese Kanäle sind nicht stationär, sondern wandern seitlich teils durch eigenen Antrieb, teils im Strömungsfeld der Nachbarn. Treffen zwei aufeinander, verschmelzen sie zu einem einzigen, dessen Vertikalgeschwindigkeit sich kurzzeitig erhöht und der sich infolgedessen bis in größere Tiefen erstrecken kann. Bei einem solchen Verschmelzungsprozeß werden (bei den Hauptreihensternen) Schallwellen ausgesandt. In allen Modellen mit genügend starker Konvektion wird die Fundamental-Mode angeregt. Die Verschmelzungsprozesse hinterlassen weite Regionen mit relativ kleinen Vertikalgeschwindigkeiten. Hier bilden sich aufgrund der konvektiven Instabilität neue Abströmkanäle, die horizontal advektiert werden, zusammenstoßen usw. Bei den heißeren Modellen, in denen die effektive Strahlungsdämpfung nur ineffiziente Konvektion zuläßt, verläuft dieser Vorgang sehr gemächlich, bei den kühleren aber zunehmend vehement und turbulent mit Mach-Zahlen bis zu 4.

In den Abströmkanälen sind die Vertikalgeschwindigkeiten am größten. Hier wird praktisch der gesamte Netto-Energiefluß transportiert. Hier werden Schallwellen produziert, und sie sind für die Anregung der Fundamental-Mode verantwortlich. Außerdem regelt ihre Entstehungsrate und Dynamik den mittleren horizontalen Abstand zweier Kanäle, also auch die mittlere Größe eines Aufströmgebietes. D.h. man sollte die solare und stellare Granulation nicht als Feld von hellen Flecken (den heißen Aufströmgebieten) auf einem dunklen Untergrund sondern besser als dunkles Netzwerk auf einem hellen Grund beschreiben.

Der Vergleich mit der lokalen Standard-Mischungswegtheorie fällt zwiespältig aus: Bei den Weißen Zwergen läßt sich im untersuchten Effektivtemperaturbereich der maximale konvektive Fluß, die maximale Vertikalgeschwindigkeit, der mittlere Temperaturgradient der Photosphäre und die vertikale Ausdehnung der instabilen Schicht mit einem Mischungswegparameter von etwa 1.5 ± 0.3 *verblüffend gut* wiedergeben. Dagegen wird der Verlauf des konvektiven Flusses mit der Höhe und vor allem die Tiefenerstreckung der konvektiven Geschwindigkeitsfelder von der Mischungswegtheorie *vollkommen falsch* dargestellt. Sie unterschätzt die Masse der konvektiv durchmischten Zone um ca. einen Faktor 100.

Bei den A-Stern-Modellen ist das Bild uneinheitlicher: Die Mischungswegtheorie gibt den maximalen Fluß nur mit einem sehr kleinen Mischungswegparameter von ungefähr 0.5 wieder, während für die maximalen Geschwindigkeiten ein etwas größerer Wert notwendig ist. Die effektive Masse der gesamten konvektiv durchmischten Zone wird um etwa einen Faktor 10 unterschätzt.

Diese teils eindeutig für, teils klar gegen die Mischungswegtheorie sprechenden Befunde lassen sich dadurch erklären, daß zwar die größenordnungsmäßigen Abschätzungen der Theorie ungefähr zutreffen, daß aber das dynamische Bild von sich nur in der instabilen Schicht auf- und abbewegenden Blasen nicht haltbar ist.

1 Einleitung

1.1 Allgemeine Bemerkungen

Gas- oder Flüssigkeitselemente, die eine geringere Dichte als ihre Umgebung besitzen, erfahren in einem Schwerefeld eine Auftriebskraft. Überschreitet der vertikale Temperaturgradient in einer hydrostatischen Schichtung (z.B. in einem Stern) eine gewisse Grenze, kann deshalb eine Gasschicht gegen kleine Dichtefluktuationen instabil werden, und es bildet sich Konvektion aus, d.h. Energie wird durch Materiebewegungen transportiert.

Konvektionsströmungen spielen bei vielen irdischen Phänomenen eine wichtige Rolle: Sie beeinflussen das tägliche lokale Wettergeschehen durch die Erzeugung von Thermik, die zur Bildung von Quellbewölkung führt. Die globalen Windsysteme sind Konvektionsströmungen in einem größeren Maßstab, die warme Luftmassen aus äquatornahen in kühlere Gebiete transportieren. Der Golfstrom wird durch Konvektion im Meer erzeugt. Konvektionsströme im zähflüssigen Erdinnern führen an der Oberfläche zur Kontinentalverschiebung und sind wichtig für das Magnetfeld der Erde.

Auch im Labor wird Konvektion gern untersucht. Das Experiment von Bénard zur Erzeugung der polygonalen Konvektionszellen in einer von unten erwärmten Flüssigkeit zählt zu den Klassikern zur Erforschung nichtlinearer, chaotischer oder strukturbildender Systeme. Lorenz konnte die komplizierten Differentialgleichungen, die es beschreiben, auf ein einfaches System reduzieren, das einer der Ausgangspunkte der Chaos-Theorie zur theoretischen Erforschung nichtlinearer Systeme war (Schuster 1984). U.a. wird an ihm der Übergang von regulärem periodischen zu irregulärem chaotischen Verhalten studiert. Und die Kenntnis der Figur des Lorenz-Attraktors gehört schon fast zum Allgemeinwissen. Oft werden Modelle von Konvektion als Generator und zum Studium von turbulenten Strömungen verwendet.

Schon seit langem ist die bei hoher Vergrößerung im Teleskop sichtbare körnige Struktur der Sonnenoberfläche, die sogenannte Granulation, bekannt. Sie besteht aus hellen, heißen, aufsteigenden Gebieten mit typischen Abmessungen von 1000 km (siehe Bray et al. 1984), die von dunklen Bändern mit kühler, abströmender Materie umgeben sind. Die Granulen sind aber nur die obersten sichtbaren Ausläufer der sich bis in ca. 200000 km Tiefe (ungefähr 30 % des Sonnenradius) erstreckenden Konvektionszone (siehe die helioseismologischen Untersuchungen von z.B. Christensen-Dalsgaard et al. 1991).

Auch andere kühle sonnenähnliche Hauptreihensternen besitzen eine Konvektionszone, deren Tiefe mit steigender Effektivtemperatur abnimmt, bis sie (in den A-Sternen) nur noch die alleräußersten Schichten umfaßt. Mit fallender Effektivtemperatur erstreckt sie sich bis in immer größere Tiefen, und Sterne auf der Hayashi-Linie sind vollständig durchmischt.

Sterne, die etwas heißer sind als die Sonne, besitzen zusätzlich zur Oberflächen- eine Kernkonvektionszone. Massereiche Sterne haben, besonders wenn sie in fortgeschrittenen Fusionsstadien eine komplexe Schalenstruktur besitzen, eine ganze Reihe von Konvektionszonen. Auch während ihrer Endstadien als Weiße Zwerge kann sich in bestimmten Schichten eines Sterns wieder Konvektion entwickeln. Und so haben die kühlen Weißen Zwerge von Typ DA wieder flache Oberflächenkonvektionszonen, ganz ähnlich wie die A-Sterne.

Konvektion hat Einfluß auf den Temperaturgradienten, kann Materie durchmischen, Strahlungs- in mechanische Energie umsetzen und mit Magnetfeldern wechselwirken.

- Sie beeinflußt die photosphärische Temperaturschichtung, was bei spektroskopischen Untersuchungen von Sternen mit oberflächennahen Konvektionszonen berücksichtigt werden muß. Sie kann zur Linienverbreiterung durch nichtthermische Geschwindigkeitsfelder (Mikro- und Makroturbulenz) beitragen und verursacht Linienasymmetrien.

- Über den Temperaturgradienten bestimmt die Konvektion die Zentraltemperatur eines Sterns und damit auch die Fusions- und Energieerzeugungsraten mit. Durch konvektives Mischen kann Fusionszonen unverbrauchtes Brennmaterial zugeführt werden und der trennenden Wirkung von differentiellem Strahlungsauftrieb oder gravitativem Absetzen entgegengewirkt werden. So entscheidet die Konvektion über Aufbau und Entwicklung eines Sterns.

- Konvektion kann stellaren Oszillationen Energie liefern (wie bei der Sonne) oder ihnen Energie entziehen (wie bei den Sternen auf der kühlen Seite der roten Kante des Cepheiden-Instabilitätsstreifens). Mechanische Energie aus den konvektiven Strömungen kann in höhergelegene Schichten transportiert werden und sie heizen. Bei der Beschleunigung von Teilchen, die als Wind den Stern verlassen, kann die Konvektion für einen Teil des Startimpulses verantwortlich sein.

- Auch mit Magnetfeldern können konvektive Plasmaströmungen wechselwirken, indem sie Feldlinien mit sich reißen, sie verdrillen, komprimieren oder strecken. Und so spielt die Konvektion über den Dynamoeffekt auch für den 11-jährigen Sonnenfleckenzyklus eine Rolle.

Zwar ist das System der Grundgleichungen, das stellare Konvektion beschreibt, lange bekannt. Aber es ist hochgradig nichtlinear, und die hohen Rayleigh- und Reynolds-Zahlen sorgen für turbulente Strömungen, deren analytische Behandlung in einer geschichteten Atmosphäre bei effizientem nichtlokalen, frequenzabhängigen Strahlungstransport nahezu ausgeschlossen erscheint.

Außer im Fall der Sonnengranulation gibt es praktisch kein direktes Beobachtungsmaterial über die Dynamik stellarer Konvektion, und so erscheint auch die Konstruktion einer phänomenologischen Theorie schwierig. Trotzdem wurde dieser Versuch mit der Mischungswegtheorie gewagt, die von Erika Böhm-Vitense (1953, 1958) auf Anregung von Albrecht Unsöld in Kiel entscheidend mitentwickelt wurde. Obwohl dieser Ansatz inzwischen zu einer der wichtigen Säulen der Theorie von Sternaufbau und -entwicklung geworden ist und viele Erfolge verbuchen konnte, sind auch zahlreiche Unzulänglichkeiten zutage getreten. So enthält sie einen freien Parameter, der je nach Problem angepaßt werden kann bzw. muß. Die Mischungswegtheorie beschreibt die Grenzen einer Konvektionszone nicht korrekt, denn sie beinhaltet kein Überschießen der Materie über die instabile Zone hinaus, wie man es aber an der Sonnengranulation beobachtet. Und die Mischungswegtheorie ist keine dynamische Theorie, die es gestatten würde, z.B. die Wechselwirkung mit stellaren Pulsationen zu beschreiben. In helioseismologischen Untersuchungen hat sich herausgestellt, daß die Mischungswegtheorie zwar die globale Struktur der Konvektionszone der Sonne (bei geeigneter Wahl des Mischungswegparameters) gut wiedergeben kann, daß es aber insbesondere am oberen und unteren Rand Unstimmigkeiten gibt (Gabriel 1994, Monteiro et al. 1994).

Es wurden verschiedene Modifikationen (z.B. Canuto & Mazzitelli 1991 und 1992) oder sogar nichtlokale Erweiterungen (siehe z.B. Xiong 1991) vorgeschlagen. Aber der Durchbruch zu einer neuen Konvektionstheorie ist noch nicht gelungen.

Eine andere Möglichkeit bietet seit einigen Jahren die direkte numerische Integration der Grundgleichungen mit Hilfe leistungsfähiger Computer. Die unterschiedlichsten physikalischen Systeme wurden mit vielen verschiedenen numerischen Methoden unter Zuhilfenahme einer ganzen Reihe mehr oder weniger einschränkender Annahmen untersucht. Aus der großen Liste der Arbeiten kann ich hier nur einige beispielhaft angeben:

Frühe Arbeiten benutzten vielfach halbanalytische Techniken, bei der die konstituierenden Gleichungen zuerst nach horizontalen Moden (englisch „planforms") entwickelt wurden, um ihre Anzahl dann auf eine zu reduzieren. Die sich ergebenden Gleichungen hängen nur noch von der Höhe und der Zeit ab und wurden dann numerisch gelöst (Latour et al. 1976). Üblicherweise werden aber stationäre Lösungen gesucht, deren Aussehen ganz entscheidend von der Geometrie und Ausdehnung der vorgegebenen „planform" abhängt. Auf diese Weise kann der turbulente Charakter der oft schallschnellen stellaren Konvektionsströmungen nicht wiedergegeben werden. Beispielsweise untersuchten Toomre et al. (1976) auf diese Weise das Überschießen der konvektiven Strömungen über die instabile Schicht hinaus. Wegen der empfindlichen Parameterabhängigkeit ihrer Ergebnisse konnten sie aber im wesentlichen nur qualitative Resultate vorweisen. In einer weiteren Arbeit (Latour et al. 1981) untersuchten die Autoren dann sogar die dynamischen Kopplung der beiden Konvektionszonen in einem A-Stern mit der gleichen Methode.

Nelson und Musman (1977) und Nelson (1980) studierten mit einer ähnlichen Methode aber mit vorgegebener Hintergrundschichtung Granulation auf der Sonne und in einem F-Stern.

Deupree hat in einer ganzen Reihe von Arbeiten (1974-1985) vor allem die Wechselwirkung von Konvektion und Pulsationen in Sternen in der Nähe des Cepheiden-Instabilitätsstreifens untersucht. Er benutzte ein zweidimensionales Gitter mit jedoch typischerweise nur 2 bis 4 horizontalen Gitterpunkten und erhielt instationäre Lösungen. Aber es gab immer wieder Probleme mit der Stabilität und der nötigen numerischen Viskosität.

Deupree und Varner (1980) berechneten mit Hilfe dieser „2"D-Simulationen einen temperaturabhängigen effektiven Mischungswegparameter, der sich jedoch wegen der speziellen Version der Mischungswegtheorie nicht direkt mit anderen Angaben vergleichen läßt.

Chan et al. (1982), Sofia und Chan (1984) und Chan und Sofia (1986) verwendeten dagegen ein „richtiges" zweidimensionales Gitter für ihre Simulationen konvektiver Strömungen. In ihrer Arbeit von 1984 untersuchten Sofia und Chan numerische Modelle der Heliumkonvektionszonen eines A5- und eines F0-Sterns.

Mit Hilfe dreidimensionaler Simulationen idealisierter Konvektionsströmungen testeten und bestätigten Chan und Sofia (1987 und 1989) einen Teil der Grundannahmen der Mischungswegtheorie: Sie fanden u.a., daß vertikale Korrelationslängen von vertikalen Geschwindigkeiten sich proportional zur Druckskalenhöhe verhalten.

Rast und Toomre (1993) betonen nachdrücklich die Wichtigkeit der Ionisation für stellare Konvektionszonen und untersuchen ihre Fähigkeit, eine thermische Grenzschicht-Instabilität zu bilden, und deren Eigenschaften anhand zweidimensionaler Modelle, die zwar die Wasserstoffionisation, aber nur eine konstante Opazität berücksichtigen. Das Bild konvektiver Dynamik, das diese Autoren entwerfen, und insbesondere die Beschreibung des Wechselspiels zwischen konvektiver Instabilität, die neue Abströmkanäle erzeugt, und der horizontalen Advektion, die sie fortreißt und in bereits bestehende treibt (siehe auch Hurlburt et al. 1994), findet sich auch in den Kieler Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen wieder. Hurlburt et al. (1994) schlagen auch vor, die konvektive Strömung als „set of plumes or thermals" zu beschreiben.

Sehr erfolgreich sind inzwischen die Bemühungen, die solare Granulation mit Hilfe extrem aufwendiger dreidimensionaler Hydrodynamik-Simulationen, die nichtlokalen Strahlungstransport, realistische Opazitäten und die wichtigsten Ionisationsprozesse berücksichtigt, zu modellieren (siehe z.B. Nordlund 1982, 1984, 1984, 1985, Dravins et al. 1986, Stein et al. 1989, Rast et al. 1993)

Diese Rechnungen konnten auch schon auf einige Sterne mit sonnenähnlichen Konvektionszonen ausgedehnt werden (Dravins 1987, Nordlund und Dravins 1990).

Der Kieler Strahlungs-Hydrodynamik-Code basiert auf dem Verfahren und Programm von Stefanik et al. (1984). Die Beschränkung auf zwei räumliche Dimensionen bedeutet zwar einen gewissen Verlust an Realitätsnähe. Aber nur so ist es bisher möglich, *eine große Anzahl* von Modellen verschiedenster Sterntypen, numerischer Parameter und Geometrien zu erzeugen.

Bisher konzentrierten sich die Untersuchungen vor allem auf die Sonne (Steffen und Muchmore 1988, Steffen et al. 1989, 1990, 1994, Krüß 1991, Steffen 1991, 1992, 1994), und die Simulationen zeigen eine ermutigende Übereinstimmung mit der Beobachtung (Freytag 1991, Steffen und Freytag 1991). Die Rechnungen konnten auf sonnenähnliche Sterne und in letzter Zeit in einem großen Sprung auf den Bereich der kühlen Weißen Zwerge vom Spektraltyp DA ausgedehnt werden (Ludwig et al. 1993, 1994).

In meiner Arbeit werde ich nun zwei vollständige Sequenzen von Strahlungs-Hydrodynamik-Modellen stellarer konvektiver Hüllen vorstellen, in denen jeweils die gesamte Konvektionszone, einschließlich ausgedehnter konvektiv stabiler Schichten, enthalten ist. Die eine umfaßt die Hauptreihen-A-Sterne im Effektivtemperaturbereich von $T_{\mathrm{eff}} = 7500\,\mathrm{K}$ bis $T_{\mathrm{eff}} = 9500\,\mathrm{K}$, die andere Weiße Zwerge vom Spektraltyp DA im Bereich $T_{\mathrm{eff}} = 11400\,\mathrm{K}$ bis $T_{\mathrm{eff}} = 14200\,\mathrm{K}$.

Ich werde die dynamischen Eigenschaften der Konvektion und ansatzweise ihre Wechselwirkung mit Pulsationen untersuchen, die vertikale Struktur der Konvektionszone analysieren und mit der lokalen Mischungswegtheorie vergleichen und ein besonderes Augenmerk auf das Überschießen (englisch „Overshoot“) der konvektiven Strömungen über die instabile Zone hinaus richten.

1.2 Aufbau der Arbeit

Nach der Zusammenfassung (Abschnitt 0) und dieser Einleitung stelle ich im Kapitel 2 die Strahlungs-Hydrodynamik-Grundgleichungen vor, diskutiere die verwendeten Näherungen, erläutere kurz das verwendete numerische Schema und leite eine Reihe wichtiger thermodynamischer Beziehungen her. Außerdem gibt es hier Tabellen praktisch aller bisher von mir durchgeführten Simulationsrechnungen. Es soll im wesentlichen als Basis und zum Nachschlagen für spätere Diskussionen dienen.

Im Kapitel 3 gebe ich Abschätzungen für Größen- und Zeitskalen an, die für die betrachteten stellaren konvektiven Hüllen von Bedeutung sind. Ich berechne wichtige dimensionslose Größen wie z.B. die Rayleigh- und die Reynolds-Zahl, die für konvektive Strömungen relevant sind. Außerdem wird die konvektive Instabilität und die Abhängigkeit von Strahlungsaustausch und Viskosität erläutert.

Aus den hydrodynamischen Grundgleichungen wird in Abschnitt 4 die adiabatische Wellengleichung hergeleitet und für einige einfache Spezialfälle gelöst. Außerdem diskutiere ich kurz die verschiedenen in Sternen vorkommenden Schwingungstypen.

Im Kapitel 5 gebe ich eine kurze Erläuterung der Grundannahmen der lokalen Mischungswegtheorie, sowie eine Herleitung der Gleichungen.

Erste Ergebnisse der Modellrechnungen präsentiere ich im Abschnitt 6, in Form mehrerer repräsentativer Strömungsbilder der verschiedenen Typen von Konvektionszonen. Es wird untersucht, wie sich die mit abnehmender Effektivtemperatur vehementer werdende Konvektion darstellt.

Die Abhängigkeit der Ergebnisse von numerischen Parametern und geometrischen Vorgaben wird in Kapitel 7 analysiert.

Paragraph 8 konzentriert sich auf die dynamischen Eigenschaften der Konvektion und die zeitliche Veränderung der konvektiven Strömungsformen. Weiterhin werden typische horizontale Größenskalen ermittelt und über der Effektivtemperatur aufgetragen.

Im *Hauptabschnitt 9* wird die vertikale Struktur einer Konvektionszone untersucht und mit den Aussagen der Mischungswegtheorie verglichen. Insbesondere wird auf die gesamte Ausdehnung der Konvektionszone geachtet, und es werden mehrere Möglichkeiten angegeben, ihre Grenzen festzulegen. Für jedes Modell werden Mischungswegparameter bestimmt, die jeweils einen besten Fit bezüglich einer ausgewählten charakteristischen Größe (wie maximaler konvektiver Fluß, maximale Vertikalgeschwindigkeit usw.) ergeben. Ihre Abhängigkeit von Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung und Sterntyp wird diskutiert.

Die Wechselwirkung von Konvektion und Pulsationen wird im Kapitel 10 angerissen. U.a. demonstriere ich den Prozeß der Schallemission während einer Verschmelzung zweier Abströmkanäle anhand einer zeitlichen Sequenz von Strömungsbildern und Druckstörungsfeldern.

Im Paragraph 11 ziehe ich Schlußfolgerungen aus meiner Arbeit und gebe einen Ausblick auf weitere geplante Untersuchungen.

Es folgen ein Literaturverzeichnis und ein Index.

2 Realistische Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen

2.1 Problemstellung und Näherungen

Eine Vielzahl physikalischer Prozesse, die auf den unterschiedlichsten räumlichen und zeitlichen Skalen ablaufen, spielt für stellare Konvektion eine Rolle. Um das Problem überhaupt handhabbar zu machen, sind eine Reihe von Annahmen bzw. Näherungen notwendig:

Kleiner Ausschnitt der Sternoberfläche, künstliche Randbedingungen. Es ist bisher unmöglich, den gesamten Stern bis in alle Tiefen mit hoher Auflösung zu simulieren. Deshalb ist die Beschränkung auf ein kleines Gebiet an der Sternoberfläche, das nur wenige Granulen enthält und nur die obersten Schichten umfaßt, notwendig. Dazu müssen künstliche Randbedingungen eingeführt werden, wodurch mögliche Wechselwirkungen der Granulen mit großräumigen Strömungen wie den Riesenzellen in der Sonne oder der meridionalen Zirkulation unterdrückt und andererseits artifizielle Wechselwirkungen mit den Rändern eingeführt werden. Durch geeignete Wahl der Art der Randbedingungen und Lage der Ränder sollen diese Effekte so klein wie möglich gehalten werden. Aber sie sind niemals ganz auszuschließen.

Endliche Simulationszeit. Es muß gewährleistet sein, daß die Simulationen eine genügend lange Zeitspanne umfassen, um zu garantieren, daß die Struktur der Konvektionszone unabhängig von den Anfangsbedingungen ist und daß zeitlich gemittelte Größen auch für einen längeren Zeitraum als repräsentativ angesehen werden können.

Kartesische Geometrie, Vernachlässigung der Oberflächenkrümmung, konstante Schwerebeschleunigung. Durch die Beschränkung auf eine sehr flache Schicht an der Sternoberfläche (Die Tiefe der Modelle beträgt typischerweise 1/1000 des Sternradius.) können Krümmungseffekte und die Variation der Schwerebeschleunigung ohne nennenswerte Fehler ignoriert werden.

Die Beschränkung auf zwei räumlichen Dimensionen sorgt dafür, daß nicht mit $100 \times 100 \times 100$ Gitterpunkten sondern nur mit ca. 100×100 Punkten pro Modell gerechnet werden muß. Dafür muß in Kauf genommen werden, daß unsere simulierten Granulen keine polygonale Gestalt besitzen, sondern als (unendlich) lange Walzen angesehen werden müssen. Die vielfältigen Teilungs- und Verschmelzungsprozesse, die bei solaren Granulationszellen beobachtet werden, können in unseren zweidimensionalen Modellen nur sehr vereinfacht ablaufen. Weiterhin unterscheidet sich Turbulenz in zwei von der in drei Dimensionen. In zwei Dimensionen ist kein „vortex stretching“ möglich, so daß auch die Ankopplung der großräumigen konvektiven Strömungen an die kleinskalige Turbulenz nur grob wiedergegeben werden kann.

Die Einführung eines räumlichen und zeitlichen Gitters führt dazu, daß Prozesse auf Skalen unterhalb der Gitterweite nicht direkt dargestellt werden können. D.h. daß die turbulente Energiekaskade nicht aufgelöst werden kann, sondern daß ihr Einfluß auf die großräumigen Strömungen durch die Einführung einer turbulenten Viskosität („sub-grid-scale“-Viskosität) modelliert werden muß. Die kleinskaligen Strömungselemente können zwar die großen beeinflussen, aber sie leisten praktisch keinen direkten Beitrag zum konvektiven Energiefluß.

Einfache chemische Zusammensetzung. Stellares Material besteht aus einem Gemisch aller Elemente, die auch auf der Erde vorkommen. Die Hauptkomponenten sind dabei Wasserstoff und Helium, die durch eine Vielzahl von Spurenelementen verunreinigt sind. Diese Elementmischung wird bei der Berechnung der Opazitäten berücksichtigt. Für die Zustandsgleichung besteht das Modellgas dagegen für Hauptreihensterne aus Wasserstoff H, Helium He und *einem* repräsentativen Metall in solarer Zusammensetzung und für Weiße Zwerge vom Typ DA aus reinem Wasserstoff ohne zusätzliche Spurenelemente.

Die homogene Durchmischung, die in unseren Simulationen vorausgesetzt wird, wird in der Realität durch die Konvektion gegenüber allen trennenden Einflüssen aufrechterhalten.

Die Vernachlässigung von Rotationseffekten wie dem Auftreten von Corioliskräften sollte für die oberflächennahen vehementen Konvektionsschichten keine große Rolle spielen.

Keine Magnetfelder. Die Einbeziehung von Magnetfeldern ist für das Veständnis von begrenzten photosphärischen Regionen auf der Sonne wie den Sonnenflecken entscheidend wichtig. Auch A- und F-Sterne können meßbare Felder besitzen. Und auf Weißen Zwergen erwartet man (und mißt teilweise) noch höhere Magnetfeldstärken als in Hauptreihensternen. Aber man kann vermuten, daß die Felder in Sternen mit geringer magnetischer Aktivität ähnlich wie in der Sonne räumlich stark konzentriert auftreten (z.B. durch den Einfluß der konvektiven Strömungen) und große Teile der Sternoberfläche weitgehend magnetfeldfrei sind, so daß sich dort ungestörte Konvektion entfalten kann.

Graue oder einfache nichtgraue Opazitäten. In den optisch dicken Schichten, die den Großteil jedes Modells umfassen, sind graue Opazitäten eine sehr gute Näherung. Wichtig sind nichtgraue Opazitäten nur für die photosphärische Temperaturschichtung. Diese wird durch unser einfaches nichtgraues Opazitätsschema in eindimensionalen Rechnungen, die die Konvektion durch den Mischungswegformalismus berücksichtigen, gut wiedergegeben. So ist zu erwarten, daß unser nichtgraues Opazitätsschema auch in den Hydrodynamikrechnungen zu realistischen Temperaturschichtungen führt. Streuung wird in Form von wahrer Absorption berücksichtigt.

Lokales Thermodynamisches Gleichgewicht (LTE). Abweichungen vom LTE können in den untersuchten A-Sternen für genaue spektroskopische Häufigkeitsbestimmungen eine Rolle spielen, sie sind jedoch nicht stark genug, um die Atmosphären- oder gar die darunterliegenden konvektiven Schichten zu beeinflussen. Deshalb wird sowohl bei der Zustandsgleichung als auch bei der Berechnung der Quellfunktion die Gültigkeit des LTE vorausgesetzt.

Vernachlässigung des Strahlungsdruckes. Der Strahlungsdruck kann im Sterninnern für die genaue Schichtung und in den äußeren sehr dünnen Hüllen von Sternen für den Antrieb von Winden durch Beschleunigung in den Linien wichtig sein. In den Schichten, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen, liefert er aber nur einen geringen Beitrag zum Gesamtdruck.

Trotz dieser zahlreichen Näherungen besteht die Hoffnung, daß viele Eigenschaften stellarer Konvektion richtig wiedergegeben werden können, denn die Modellrechnungen beinhalten immer noch viele Aspekte der für die realistischen Konvektionszonen wichtigen Physik:

Nichtlineare kompressible Navier-Stokes-Grundgleichungen der Hydrodynamik, keine Boussinesq- oder anelastische Näherung, keine Moden-Näherung.

Nichtlokaler Strahlungstransport. Es wird keine Diffusionsnäherung verwendet, sondern die Strahlungstransportgleichung wird tatsächlich entlang einer großen repräsentativen Anzahl von Strahlen integriert.

Genügend großes Modellvolumen, das zwischen der konvektiv instabilen Schicht und dem oberen und unteren Rand eine ausgedehnte (mehrere Druckskalenhöhen tiefe) stabile Pufferschicht besitzt. Die horizontale Ausdehnung ist (für die meisten Modelle) ausreichend, um das gleichzeitige Auftreten mehrerer Granulen im Simulationsvolumen zu erlauben.

Zwei räumliche und die zeitliche Dimension erlauben eine wesentlich realistischere Darstellung von konvektiven Strömungen als die standardmäßige Mischungswegtheorie, die nur ein grobes eindimensionales, stationäres Bild stellarer Konvektion liefert.

Die realistische Zustandsgleichung berücksichtigt die Ionisation von Wasserstoff (HI $\leftrightarrow$ HII) und Helium (HeI $\leftrightarrow$ HeII $\leftrightarrow$ HeIII), die Bildung von Wasserstoffmolekülen (H $\leftrightarrow$ H_2) und die Anwesenheit eines (neutralen) Metalls.

Die realistischen Opazitäten geben zumindest in der nichtgrauen Version photosphärische Temperaturschichtungen, die mit einem wesentlich komplizierteren Opazitätsschema und dem ATLAS6-Code (Kurucz 1979) gewonnen wurden, erstaunlich gut wieder (Ludwig, Jordan und Steffen 1994).

Untersucht werden soll also, wie sich ein Gasgemisch aus Wasserstoff, Helium und Spuren eines repräsentativen Metalls (für die Weißen Zwerge: reiner Wasserstoff) mit einer gegebenen Säulendichte in einem rechteckigen Kasten mit einer Kantenlänge von typischerweise 10000 km (für die Weißen Zwerge: 5 km) unter dem Einfluß der Schwerkraft verhält, wenn am Boden ein (durch die Effektivtemperatur) vorgegebener Energiefluß durch Strahlung eingespeist wird. Die Box enthält mindestens eine der Ionisationszonen von Wasserstoff oder Helium, in der die Schichtung gegen konvektive Störungen instabil ist, so daß sich dort eine Konvektionszone entwickeln wird, in der ein Teil der Energie nicht durch die Strahlung sondern durch die konvektive Strömung transportiert wird. Im oberen Bereich des Kastens wird die Materie optisch dünn. Hier liegt also die spektroskopisch beobachtbare Photosphäre, in der die Dichte schließlich so gering wird, daß keine nennenswerte Energie durch Materietransport befördert werden kann.

2.2 Liste der verwendeten Symbole

In der folgenden Liste sind die wichtigsten der verwendeten Symbole aufgeführt. Sie soll als Referenz dienen und verweist auf Definitionen, genauere Erläuterungen oder wichtige Formeln für die jeweilige Größe. Hier bedeutet $\rightarrow$GAS, daß diese Größe als Eingabeparameter der Routine für die Zustandgleichung gebraucht wird. Entsprechend heißt GAS$\rightarrow$, daß diese Größe von jener Routine berechnet wird. Eine weitere FORTRAN-Routine (XKAROS) berechnet die Opazitäten aus Temperatur und Druck. Die meisten Größen dieser Tabelle lassen sich mit meinem IDL-Programm PLOTHD aus den Hydrodynamik-Basisdaten berechnen und graphisch darstellen.

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & \frac{4\sigma}{c}, \text{ Strahlungskonstante} \\
abuX & : & \text{Anzahlbruchteil von Wasserstoff, }\rightarrow\text{GAS, Tabelle 1} \\
abuY & : & \text{Anzahlbruchteil von Helium, }\rightarrow\text{GAS, Tabelle 1} \\
abuZ & = & 1 - abuX - abuY\text{, Anzahlbruchteil der Metalle, Tabelle 1} \\
a_0 & = & 0.52918\,\text{Å, Bohr-Radius} \\
\alpha & = & \frac{\ell}{H_p}, \text{ Mischungswegparameter, siehe Abschnitt 5} \\
\alpha_T & = & -\left.\frac{\partial \ln \rho}{\partial T}\right|_P, \text{ thermischer Ausdehnungskoeffizient, Gl. (2.30)} \\
B_\nu & = & \text{Planck-Funktion (frequenzabhängig), Gl. (2.23)} \\
\mathrm{Bo} & : & \text{Boltzmann-Zahl, Gl. (3.58)} \\
c & = & 2.9979 \cdot 10^{10}\text{cm s}^{-1}\text{, Lichtgeschwindigkeit} \\
c & = & \text{Konzentration, Gl. (9.13)} \\
C & \sim & 1\text{, Konstante für die turbulente Viskosität, Gl. (2.12)} \\
C_1 & \sim & 1\text{, Konstante für die Schockviskosität, Gl. (2.6) und (2.7)} \\
C_2 & \sim & 1\text{, Konstante für die Schockviskosität, Gl. (2.6) und (2.7)} \\
c_p & = & \left.\frac{\partial s}{\partial \ln T}\right|_P, \text{ spezifische Wärme bei konstantem Druck, Gl. (2.45)} \\
c_p' & = & -\left.\frac{\partial s}{\partial \ln \rho}\right|_P, \text{ GAS}\rightarrow \\
c_s & = & \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_s, \text{ adiabatische Schallgeschwindigkeit, GAS}\rightarrow\text{, Gl. (2.73)} \\
c_T & = & \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_T, \text{ isotherme Schallgeschwindigkeit, Gl. (2.74)} \\
c_v & = & \left.\frac{\partial s}{\partial \ln T}\right|_\rho, \text{ spezifische Wärme bei konstanter Dichte} \\
 & & \text{(bzw. konstantem Volumen), Gl. (2.70)} \\
c_v' & = & \left.\frac{\partial s}{\partial \ln P}\right|_\rho, \text{ Gl. (2.51)} \\
D & : & \text{Radiative Dämpfung} \\
D & : & \text{Diffusionskoeffizient} \\
D_{\text{diss}} & : & \text{Entropieänderung durch turbulente Dissipation, Gl. (2.5) und (2.19)} \\
D_{\text{mix}} & : & \text{Entropieänderung durch turbulente Mischung, Gl. (2.5) und (2.20)} \\
D_{\text{rad}} & : & \text{Entropieänderung durch Strahlung, Gl. (2.5) und (2.21)} \\
d_{\text{el}} & : & \text{Durchmesser eines konvektiven Elements (MLT)} \\
\delta & = & -\left.\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right|_P, \text{ GAS}\rightarrow \\
\Delta\rho & : & \text{Dichtefluktuation, Gl. (5.13)} \\
\Delta T & : & \text{Temperaturfluktuation, Gl. (5.11)} \\
\Delta x & : & \text{horizontale Gitterweite} \\
\Delta z & : & \text{vertikale Gitterweite} \\
\frac{D}{Dt} & = & \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + v\frac{\partial}{\partial z}, \text{ Ableitung im mitbewegten System}
\end{array}
$$

e_{int}	:	Innere Energie (pro Masseneinheit), Gl. (2.77)
e_{kin}	:	Kinetische Energie (pro Masseneinheit), Gl. (2.78)
e_{pot}	:	Potentielle Energie (pro Masseneinheit), Gl. (2.79)
e_{tot}	:	Gesamte Energie (pro Masseneinheit), Gl. (2.80)
f_{buo}	=	spezifische Auftriebskraft (MLT), Gl. (5.12)
F_{con}	=	konvektiver Fluß (MLT), Gl. (5.3)
Fr	=	Froude-Zahl, Gl. (3.51)
F_{rad}	=	Strahlungsfluß (MLT), Gl. (5.3)
g	:	Schwerebeschleunigung, Gl. (2.3)
$\vec{g}$	=	$(0, -g)$, Schwerebeschleunigungsvektor
g_{rad}	:	radiative Beschleunigung, Gl. (2.26)
$g_{\mathrm{x,shock}}$	:	horizontale Schockbeschleunigung, Gl. (2.13)
$g_{\mathrm{x,turb}}$	:	horizontale turbulente Beschleunigung, Gl. (2.15)
$g_{\mathrm{z,shock}}$	:	vertikale Schockbeschleunigung, Gl. (2.14)
$g_{\mathrm{z,turb}}$	:	vertikale turbulente Beschleunigung, Gl. (2.16)
γ	=	$\frac{c_p}{c_v}$, Verhältnis spezifischer Wärmen, Gl. (2.71)
Γ_1	:	$\left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right\vert_s$, 1. Adiabatenkoeffizient, GAS→
$\Gamma_{1,\mathrm{eff}}$	:	effektiver 1. Adiabatenkoeffizient, Gl. (4.73), (4.78)
Γ_2	:	$\frac{1}{1 - \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right\vert_s}$, 2. Adiabatenkoeffizient, Gl. (2.65)
Γ_3	:	$\left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right\vert_s + 1$, 3. Adiabatenkoeffizient, Gl. (2.63)
Gr	=	Graßhof-Zahl, Gl. (3.53)
h	:	Enthalpie (pro Masseneinheit), GAS→
H_p	=	$-\left(\frac{d \ln p}{dz}\right)^{-1}$, Druckskalenhöhe, Gl. (2.72)
H_ρ	=	$-\left(\frac{d \ln \rho}{dz}\right)^{-1}$, Dichteskalenhöhe
H_T	=	$-\left(\frac{d \ln T}{dz}\right)^{-1}$, Temperaturskalenhöhe
H_τ	=	$-\left(\frac{d \ln \tau}{dz}\right)^{-1}$, Skalenhöhe der optischen Tiefe
η	=	$\rho\nu$, dynamische Viskosität
$\eta_{\mathrm{x,shock}}$	:	horizontale Schockviskosität, Gl. (2.6)
$\eta_{\mathrm{z,shock}}$	:	vertikale Schockviskosität, Gl. (2.7)
η_{turb}	:	turbulente Viskosität, Gl. (2.12)
i	:	Horizontaler Index
j	:	Vertikaler Index
k	=	$\frac{2\pi}{\text{Wellenlänge}}$, Wellenvektor
k	:	horizontaler Wellenvektor

k_z	:	vertikaler Wellenvektor
k_{B}	=	$1.3807 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{erg/K}$, Boltzmann-Konstante
K	:	Leitfähigkeit
K_{rad}	:	radiative Leitfähigkeit, Gl. (3.44)
κ	:	Opazität (pro Masseneinheit), XKAROS→
ℓ	:	Mischungsweg, Gl. (5.35)
Ma	=	$\frac{v}{c}$, Mach-Zahl, Gl. (3.39)
μ	:	mittleres Molekulargewicht, Gl. (2.28)
n	:	Zeitlicher Index
Nu	:	Nusselt-Zahl, Gl. (3.55)
$\vec{\nabla}$	:	Nabla-Operator, Gl. (4.1) bis (4.8)
∇	=	$\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}$, Temperaturgradient, Gl. (5.2)
∇_{ad}	=	$\left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right\|_s$, adiabatischer Temperaturgradient, Gl. (2.64)
∇_{el}	:	Temperaturgradient eines konvektiven Elements
∇_{rad}	:	radiativer Temperaturgradient, Gl. (5.5)
ν	=	$\frac{\eta}{\rho}$, Kinematische Viskosität
ν	:	Frequenz
P	:	Druck, →GAS, →XKAROS
P_1	:	Eulersche Druckstörung
$\hat{P}$	:	Amplitude der Eulerschen Druckstörung, Gl. (4.42)
R	=	$8.3145 \cdot 10^7$ erg mol^{-1} K^{-1}, universelle Gaskonstante
Pe	:	Péclet-Zahl, Gl. (3.50)
Pr	:	Prandtl-Zahl, Gl. (3.41)
$\mathrm{Pr}_{\mathrm{rad}}$	:	radiative Prandtl-Zahl
$\mathrm{Pr}_{\mathrm{th}}$	$\approx$	1, molekulare Prandtl-Zahl
$\mathrm{Pr}_{\mathrm{turb}}$	$\approx$	1, turbulente Prandtl-Zahl
q	:	spezifische Wärmemenge (pro Masseneinheit)
q_{grey}	:	Hopf-Funktion, Gl. (3.4)
Q_{rad}	:	Radiative Heizung
r	=	x, horizontale Ortskoordinate
Ra	:	Rayleigh-Zahl, Gl. (3.52)
Re	:	Reynolds-Zahl, Gl. (3.48)
Ri	:	Richardson-Zahl, Gl. (3.54)
ρ	:	Massendichte, GAS→
ρ_1	:	Eulersche Dichtestörung
$\hat{\rho}$	:	Amplitude der Eulerschen Dichtestörung, Gl. (4.41)
s	:	spezifische Entropie (pro Masseneinheit), GAS→
s_1	:	Eulersche Entropiestörung
S_{el}	:	Oberfläche eines konvektiven Elements (MLT)

S_ν	:	Quellfunktion (frequenzabhängig)
σ	=	$5.6705 \cdot 10^{-5}$ erg cm^{-2} s^{-1} K^{-4}, Stefan-Boltzmann-Strahlungskonstante
σ_{atom}	:	atomarer Stoßquerschnitt
St	=	Strouhal-Zahl, Gl. (3.40)
t	:	Zeit
t_{ac}	=	$\frac{1}{\omega_{\mathrm{ac}}}$, Schallaufzeit, Gl. (3.21)
t_{BV}	=	$\frac{1}{\omega_{\mathrm{BV}}}$, Brunt-Väisälä-Zeitskala, Gl. (3.28)
t_{Courant}	=	Courant-Zeitschritt, Gl. (3.22)
t_{freefall}	:	Freifallzeit, Gl. (3.27)
t_{Kelvin}	:	Kelvin-Zeitskala, Gl. (3.29)
t_{rad}	:	Strahlungsrelaxationszeit, Gl. (3.30)
$t_{\mathrm{rad,Edd}}$	:	Strahlungsrelaxationszeit, Eddington-Näherung, Gl. (3.31)
$t_{\mathrm{rad,thick}}$	:	Strahlungsrelaxationszeit, optisch dick, Gl. (3.32)
$t_{\mathrm{rad,thin}}$	:	Strahlungsrelaxationszeit, optisch dünn, Gl. (3.33)
t_{flow}	:	Strömungszeitskala, Gl. (3.24)
$t_{\mathrm{flow,change}}$	:	Strömungsänderungszeitskala, Gl. (3.25)
t_{th}	:	Mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, Gl. (3.36)
t_{turb}	:	turbulente viskose Zeitskala, Gl. (3.37)
t_{turnover}	:	Umwälzzeitskala, Gl. (3.26)
t_{vis}	:	Viskose Zeitskala, Gl. (3.35)
T	:	Temperatur, →GAS, →XKAROS
$\hat{T}$	:	Amplitude der Eulerschen Temperaturstörung, Gl. (4.43)
T_{eff}	:	Effektivtemperatur
τ	:	optische Tiefe, Gl. (3.3)
u	:	horizontale Geschwindigkeitskomponente
$\hat{u}$	:	Amplitude der Horizontalgeschwindigkeit, Gl. (4.40)
u_{atom}	=	$1.6605 \cdot 10^{-24} g$, Atommassenkonstante
U	:	dimensionslose Größe (MLT), Gl. (5.27)
v	:	vertikale Geschwindigkeitskomponente oder Betrag der Geschwindigkeit
$\vec{v}$	=	(u, v), Geschwindigkeitsvektor
$\hat{v}$	:	Amplitude der Vertikalgeschwindigkeit, Gl. (4.28)
$\widehat{\nabla\vec{v}}$	:	Amplitude der Geschwindigkeitsdivergenz, Gl. (4.29)
V_{el}	:	Volumen eines konvektiven Elements (MLT)
W	:	dimensionslose Größe (MLT), Gl. (5.28)
x	=	r, horizontale Ortskoordinate
x_{H}	=	Ionisationsgrad von Wasserstoff
x_{He}	=	Ionisationsgrad von Helium
χ	:	Diffusivität

χ_{rad} : radiative Diffusivität, Gl. (3.45)

$\chi_\rho = \left.\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right|_T$, Gl. (2.67)

$\chi_T = \left.\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T}\right|_\rho$, Gl. (2.68)

z : vertikale Ortskoordinate

ω_{ac} : akustische Cutoff-Frequenz, Gl. (2.75)

ω_{BV} : Brunt-Väisälä-Frequenz, Gl. (2.76)

2.3 Strahlungs-Hydrodynamik-Grundgleichungen

2.3.1 Hydrodynamik-Grundgleichungen

Die Grundgleichungen bestehen im wesentlichen aus den Bilanzgleichungen für die Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie in jedem Volumenelement. Berücksichtigt werden dabei äußere Kräfte (Schwerebeschleunigung), sowie der Einfluß von Schocks und Turbulenz. Die Energiegleichung schließt außerdem den nichtlokalen Transport von Energie durch Strahlung ein. Die Gleichungen gelten für zwei Dimensionen in kartesischer Geometrie:

Die *Kontinuitätsgleichung* drückt einfach die Erhaltung der Gesamtmasse aus. Die Masse in jedem Volumenelement ändert sich nur durch Ein- oder Ausströmen von Materie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial z} = 0 \ . \tag{2.1}$$

Der Impuls der Materie in einem Volumenelement kann sich durch Impulsadvektion, durch einen Druckgradienten, durch äußere Kräfte wie die Schwerebeschleunigung und durch die Wirkung von viskosen Kräften, die aufgrund von Schocks oder durch Turbulenz auf kleineren nicht aufgelösten Skalen entstehen (siehe Kapitel 2.3.2), ändern. Dadurch ergeben sich die *Impulsbilanzgleichungen* (oder auch *Eulersche Gleichung* in Abwesenheit der Beschleunigungen g) für die horizontale Komponente

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \left(g_{\mathrm{x,turb}} + g_{\mathrm{x,shock}}\right) \tag{2.2}$$

und die vertikale Komponente

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \left(-g + g_{\mathrm{z,turb}} + g_{\mathrm{z,shock}}\right) \ . \tag{2.3}$$

Analog gibt es eine Gleichung für die Erhaltung der gesamten Energie:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho(u^2+v^2)}{2} + \rho e + \rho g z\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\left(\frac{\rho(u^2+v^2)}{2} + \rho h\right)\right) \quad + \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(v\left(\frac{\rho(u^2+v^2)}{2} + \rho h + \rho g z\right)\right) \\
&= \\
&-\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{\mathrm{diss,x}} + F_{\mathrm{mix,x}} + F_{\mathrm{rad,x}}\right) \quad - \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(F_{\mathrm{diss,z}} + F_{\mathrm{mix,z}} + F_{\mathrm{rad,z}}\right) \ .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Entropie wird in einer idealen Flüssigkeit (also in Abwesenheit jeglicher Viskosität und Energieänderung durch Strahlungsaustausch) einfach advektiert. Deshalb läßt sich die *Energiegleichung* auch in der folgenden Form schreiben

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial z} = D_{\mathrm{diss}} + D_{\mathrm{mix}} + D_{\mathrm{rad}} \ , \tag{2.5}$$

wobei die nichtidealen Terme jetzt auf der rechten Seite als Quellterme auftauchen: die Entropieänderung durch turbulente und Schockdissipation (Gl. (2.19)), durch turbulente Mischung (Gl. (2.20)) und durch Strahlungsaustausch (Gl. (2.21)).

2.3.2 Berücksichtigung von Schocks und Turbulenz

In jedem realen Gas wird innerhalb eines *Schocks* Energie dissipiert. Deshalb verliert hier die Annahme des adiabatischen Materietransports seine Gültigkeit. Um die dissipative Entropieerhöhung zu modellieren, wird eine richtungsabhängige *Schockviskosität* eingeführt (siehe von Neumann & Richtmyer 1950, Norman & Winkler 1986):

$$\eta_{\mathrm{x,shock}} = \rho\left[C_1\Delta x c_s - (C_2\Delta x)^2 \min\left(\frac{\partial u}{\partial x}, 0\right)\right] \tag{2.6}$$

$$\eta_{\mathrm{z,shock}} = \rho\left[C_1\Delta z c_s - (C_2\Delta z)^2 \min\left(\frac{\partial v}{\partial z}, 0\right)\right] \ . \tag{2.7}$$

Diese Viskosität sorgt dafür, daß das numerische Schema in der Nähe von steilen Geschwindigkeitsgradienten stabil bleibt und keine (allzu großen) Überschwinger zeigt.

Eine Konvektionszone arbeitet als Wärmekraftmaschine, die aus dem Temperaturgefälle vom heißen Sterninnern zum kühlen Weltraum kinetische Energie erzeugt. Diese Energie kann zu einem kleinen Teil in Form von Schallwellen oder auf dem Umweg über Magnetfelder nach außen abgegeben werden und dann eine Chromosphäre oder Korona aufheizen. Der größte Teil wird jedoch in der Konvektionszone wieder in Wärme umgewandelt. Die Energie kann jedoch auf den großen Skalen $L_{\mathrm{conv}} \approx H_p$, die für Konvektionszellen typisch sind (der Energiebereich), wegen der sehr großen Reynolds-Zahlen $Re = Re_{\mathrm{conv}} = v_{\mathrm{conv}}L_{\mathrm{conv}}/\nu$ nicht dissipiert werden. Es entsteht *Turbulenz* (siehe die Beschreibung in Landau & Lifschitz 1991):

Die konvektiven Strömungsmuster werden instabil und erzeugen große Turbulenzelemente, deren eigene Reynolds-Zahl $Re_{\mathrm{turb}} = v_{\mathrm{turb}}L_{\mathrm{turb}}/\nu$ selber wieder groß ist. (Die turbulenten abwärts strömenden Jets in den numerischen Simulationen erinnern dabei stark an eine Kármánsche Wirbelstraße.) Auch diese Elemente zerfallen wieder in kleinere, und es entsteht eine *turbulente Kaskade*, in der die kinetische Energie von den großen Skalen an die kleineren weitergereicht wird (der Trägheitsbereich), solange bis $Re_{\mathrm{turb,krit}} = v_{\mathrm{turb,krit}}L_{\mathrm{turb,krit}}/\nu \approx 1$ gilt. Auf dieser Skala (dem Dissipationsbereich), die man nach Landau & Lifschitz (1991, Gl. (33.10)) abschätzen kann zu

$$L_{\mathrm{turb,krit}} \approx \frac{L_{\mathrm{conv}}}{Re^{3/4}} \ , \tag{2.8}$$

wird endlich die molekulare Dissipation wirksam, und die kinetische Energie wird in Wärme umgewandelt.

Dabei verhalten sich turbulente Geschwindigkeitsfluktuationen v_1 auf der Skala L_1 zu Geschwindigkeitsfluktuationen v_2 auf der Skala L_2 gemäß

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{\frac{1}{3}} \ , \tag{2.9}$$

solange $L_{\rm conv} \gg L_i \gg L_{\rm turb,krit}$ gilt (Weizsäcker 1948, Gl. (22)). Das turbulente Geschwindigkeitspowerspektrum hat nach Landau & Lifschitz (1991, Gl. (33,13) die Form

$$P_v(k) \sim k^{\frac{5}{3}} \ . \tag{2.10}$$

Teilchen, die sich in einem turbulenten Geschwindigkeitsfeld bewegen, spüren umso größere relative Geschwindigkeitsfluktuationen, je weiter sie sich voneinander entfernen. Ihre Durchmischung läßt sich deshalb nicht mit einem konstanten Diffusionskoeffizienten beschreiben, sondern gehorcht einem Gesetz, nach dem der relative Abstand L zweier Teilchen mit der Zeit t gemäß

$$L \sim L^{\frac{2}{3}}\, t^{\frac{1}{2}} = D(L)\, t^{\frac{1}{2}} \ . \tag{2.11}$$

wächst.

Nur die räumlichen Skalen der Konvektionszellen und der größten Turbulenzelemente sind jedoch durch das grobe Gitter der numerischen Modelle auflösbar. Nun ist es aber für die größten Turbulenzelemente unwichtig, auf welchen Skalen letztlich die Dissipation kinetischer Energie abläuft. Man kann deshalb hoffen, die turbulente Dissipation modellieren zu können, indem man die turbulente Kaskade stark verkürzt und die Dissipation schon auf Skalen von der Größe der Gitterweite stattfinden läßt.

Dazu wird eine *turbulente Viskosität* (engl. „sub-grid-scale-viscosity“) definiert, die die Wechselwirkung mit in den Simulationen nicht aufgelösten Turbulenzelementen beschreiben soll (siehe Smagorinsky 1963, Deardorff 1970, 1971):

$$\eta_{\rm turb} = \rho C^2 \Delta x \Delta z \sqrt{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \tag{2.12}$$

Diese beiden Typen von Viskosität führen zu den folgenden Beschleunigungen in den Impulsgleichungen:

$$g_{\rm x,shock} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_{\rm x,shock}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] \ , \tag{2.13}$$

$$g_{\rm z,shock} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{\rm z,shock}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] \ , \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} g_{\rm x,turb} \ = \ & \frac{1}{\rho}\left[\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right. \\ & \left. -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

und

$$\begin{aligned} g_{\rm z,turb} \ = \ & \frac{1}{\rho}\left[\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right. \\ & \left. -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_{\rm turb}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Mit den Dissipationsfunktionen

$$\Phi_{\rm turb} = \eta_{\rm turb}\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \tag{2.17}$$

und

$$\Phi_{\mathrm{shock}} = \eta_{\mathrm{x,shock}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \eta_{\mathrm{z,shock}} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \tag{2.18}$$

ergibt sich die *Entropieänderung* durch *turbulente Dissipation* und *Schockdissipation*

$$D_{\mathrm{diss}} = \frac{\Phi_{\mathrm{turb}} + \Phi_{\mathrm{shock}}}{\rho T} \tag{2.19}$$

und die *Entropieänderung* durch *turbulente Mischung*

$$D_{\mathrm{mix}} = \frac{2}{\mathrm{Pr}_{\mathrm{turb}} \rho T} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_{\mathrm{turb}} T \frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{\mathrm{turb}} T \frac{\partial s}{\partial z}\right)\right] \quad . \tag{2.20}$$

2.3.3 Strahlungsaustausch

Der größte Beitrag in der Energiegleichung (2.5) ist die Entropieänderung durch Strahlungstransport

$$D_{\mathrm{rad}} = \frac{Q_{\mathrm{rad}}}{\rho T} \tag{2.21}$$

mit der Strahlungsheizung

$$Q_{\mathrm{rad}} = 4\pi\rho \int_0^\infty \kappa_\nu (J_\nu - S_\nu) \mathrm{d}\nu \quad , \tag{2.22}$$

wobei die Quellfunktion S_ν durch die Planck-Funktion B_ν,

$$S_\nu = B_\nu \quad , \tag{2.23}$$

und die winkelgemittelte Intensität J_ν durch das Integral

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu \, d\omega \tag{2.24}$$

über den gesamten Raumwinkel ω gegeben ist. Die Intensität I_ν entlang eines Strahls wird mittels der Strahlungstransportgleichung

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -\rho\kappa_\nu (I_\nu - S_\nu) \tag{2.25}$$

berechnet. Das numerische Verfahren ersetzt die Integrale in (2.22) und (2.24) durch Summen über geeignet gewählte Größen (siehe Abschnitt 2.4).

Für Abschätzungen ist noch folgende Formel aus Unsöld 1968 (Gl. (51.12)) für die *Strahlungsbeschleunigung* in einer planparallelen Strahlungsgleichgewichtsatmosphäre

$$g_{\mathrm{rad}} = \kappa \frac{\sigma T_{\mathrm{eff}}^4}{c} \tag{2.26}$$

nützlich.

2.3.4 Thermodynamische Relationen

Entscheidend für die Modellierung stellarer Konvektionszonen ist die Einbeziehung von Ionisation, d.h. der Abspaltung von Elektronen von Atomen oder Ionen (siehe Unsöld 1930 über die Bedeutung der Ionisation für die Erzeugung einer konvektiven Instabilität und Rast et al. 1993 bzw. Rast und Toomre 1993 über die Wichtigkeit, Ionisation auch in Computersimulationen miteinzubeziehen). Sie führt dazu, daß das mittlere Molekulargewicht μ nicht konstant ist, sondern sich in Abhängigkeit von Temperatur und Druck ändern kann. Das mittlere Molekulargewicht wird aus den Ionisationsgraden der Komponenten der jeweils verwendeten Elementmischung berechnet, die sich wiederum als Lösungen eines Systems von Saha-Gleichungen ergeben. Dieses System wird von der FORTRAN-Routine GAS gelöst, die aus der Temperatur T, dem Druck P sowie den jeweils für ein Modell fest vorgegebenen Häufigkeiten $abuX$ und $abuY$ von Wasserstoff und Helium die Größen ρ, Γ_1, c_s, c_p', δ, h und s berechnet. Aus diesen Größen lassen sich mit Hilfe der folgenden Beziehungen weitere ermitteln. Diejenigen Formeln, die Größen direkt aus den durch die GAS-Routine berechneten Werten ergeben, sind mit einem Kasten versehen.
Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \tag{2.27}$$

folgt sofort für das *mittlere Molekulargewicht*

$$\boxed{\mu = \frac{\rho RT}{P}} \ . \tag{2.28}$$

Die *Anzahl der Teilchen pro Volumenelement* ist

$$\boxed{\frac{N}{V} = \frac{\rho}{\mu u_{\mathrm{atom}}} = \frac{P}{R u_{\mathrm{atom}} T} = \frac{P}{k_{\mathrm{B}} T}} \ . \tag{2.29}$$

Aus den entsprechenden Definitionen (Tabelle ab Seite 2.2) ergibt sich für den *thermischen Ausdehnungskoeffizienten*

$$\boxed{\alpha_T = \frac{\delta}{T}} \ . \tag{2.30}$$

Beziehungen zwischen Ableitungen thermodynamischer Größen müssen mit etwas mehr Aufwand hergeleitet werden: Es gelten die allgemeinen Differentiationsregeln

$$\left.\frac{\partial a}{\partial b}\right|_c = \left(\left.\frac{\partial b}{\partial a}\right|_c\right)^{-1} \ , \tag{2.31}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_b = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \left.\frac{\partial x}{\partial a}\right|_b + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \left.\frac{\partial y}{\partial a}\right|_b \ , \tag{2.32}$$

$$\left.\frac{\partial a}{\partial b}\right|_c = \left.\frac{\partial a}{\partial x}\right|_c \left.\frac{\partial x}{\partial b}\right|_c \ , \tag{2.33}$$

$$\left.\frac{\partial a}{\partial b}\right|_c = \left.\frac{\partial a}{\partial b}\right|_{\ln c} \tag{2.34}$$

und

$$\left.\frac{\partial a}{\partial b}\right|_c \left.\frac{\partial b}{\partial c}\right|_a \left.\frac{\partial c}{\partial a}\right|_b = -1 \ . \tag{2.35}$$

Aus der letzten Identität (2.35) ergibt sich sofort

$$\left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right|_{\ln \rho} \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right|_{\ln P} \left.\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}\right|_{\ln T} = -1 \ , \tag{2.36}$$

$$\chi_T \left(-\frac{1}{\delta}\right) \frac{1}{\chi_\rho} = -1 \tag{2.37}$$

und

$$\frac{\chi_T}{\chi_\rho} = \delta \ . \tag{2.38}$$

Aus den Definitionen für Γ_2 und ∇_{ad} folgt sofort

$$\nabla_{\mathrm{ad}} = \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right|_s = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \ . \tag{2.39}$$

Andererseits folgt aus der Kettenregel (2.33)

$$\left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right|_s = \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right|_s \left.\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}\right|_s \ , \tag{2.40}$$

und mit den Definitionen für die drei Adiabatenkoeffizienten ergibt sich daraus

$$\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1} \ . \tag{2.41}$$

Für die Ableitung der Funktion $\ln P(\ln \rho, \ln T)$ nach dem Logarithmus der Dichte entlang einer Adiabaten gilt

$$\left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_s = \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_T + \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right|_\rho \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right|_s \ . \tag{2.42}$$

Mit den Definitionen für Γ_1, χ_ρ, χ_T und Γ_3 folgt dann (siehe Cox und Giuli 1968, Gl. (9.97))

$$\Gamma_1 = \chi_\rho + \chi_T(\Gamma_3 - 1) \ . \tag{2.43}$$

Mit der Kettenregel erhält man

$$c_p = \left.\frac{\partial s}{\partial \ln T}\right|_P = \left.\frac{\partial s}{\partial \ln \rho}\right|_P \left.\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right|_P \ , \tag{2.44}$$

also für die *spezifische Wärme bei konstantem Druck*

$$\boxed{c_p = c_p' \delta} \ . \tag{2.45}$$

Entsprechend gilt:

$$c_v = \left.\frac{\partial s}{\partial \ln T}\right|_\rho = \left.\frac{\partial s}{\partial \ln P}\right|_\rho \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right|_\rho \ , \tag{2.46}$$

also

$$c_v = c_v' \chi_T \ . \tag{2.47}$$

Aus der Identität (2.35) ergibt sich

$$\left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_s \left.\frac{\partial \ln \rho}{\partial s}\right|_P \left.\frac{\partial s}{\partial \ln P}\right|_\rho = -1 \ , \tag{2.48}$$

$$\Gamma_1 \frac{1}{-c_p'} c_v' = -1 \quad . \tag{2.49}$$

Also

$$\Gamma_1 = \frac{c_p'}{c_v'} \tag{2.50}$$

oder

$$\boxed{c_v' = \frac{c_p'}{\Gamma_1}} \quad . \tag{2.51}$$

Dann folgt mit (2.45) und (2.47) sofort

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p' \delta}{c_v' \chi_T} \quad . \tag{2.52}$$

Und mit Gleichung (2.38) ergibt sich

$$\gamma = \frac{\Gamma_1}{\chi_\rho} \quad . \tag{2.53}$$

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik für die zugeführte Wärmemenge, ausgedrückt mit Hilfe der spezifischen Energiemengen pro Masseneinheit, lautet

$$dq = T ds = de - \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad . \tag{2.54}$$

Betrachtet man die spezifische innere Energie e als Funktion von Dichte und Temperatur $e(\rho, T)$, so kann man für die infinitesimale zugeführte Wärmemenge schreiben:

$$dq = \left[\left.\frac{\partial e}{\partial \rho}\right|_T - \frac{P}{\rho^2} \right] d\rho + \left.\frac{\partial e}{\partial T}\right|_\rho dT \quad . \tag{2.55}$$

Da $ds = dq/T$ exakt ist, gilt für die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left.\frac{\partial e}{\partial \rho}\right|_T - \frac{P}{\rho^2} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{T} \left.\frac{\partial e}{\partial T}\right|_\rho \right] \quad . \tag{2.56}$$

Führt man die Differentiation aus, so heben sich zwei Terme weg,

$$-\frac{1}{T^2} \left[\left.\frac{\partial e}{\partial \rho}\right|_T - \frac{P}{\rho^2} \right] - \frac{1}{\rho^2} \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_\rho = 0 \quad , \tag{2.57}$$

und man erhält

$$\left.\frac{\partial e}{\partial \rho}\right|_T = \frac{P}{\rho^2} - \frac{T}{\rho^2} \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_\rho = \frac{P}{\rho^2} (1 - \chi_T) \quad . \tag{2.58}$$

Aus dem ersten Hauptsatz (2.54) folgt

$$c_v = \left.\frac{\partial q}{\partial T}\right|_\rho = \left.\frac{\partial e}{\partial T}\right|_\rho = T \left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_\rho \quad . \tag{2.59}$$

Entlang einer Adiabaten gilt $ds = 0$ und $dq = 0$, und Gl. (2.55) wird zu

$$0 = \left[\left.\frac{\partial e}{\partial \rho}\right|_T - \frac{P}{\rho^2} \right] + \left.\frac{\partial e}{\partial T}\right|_\rho \left.\frac{\partial T}{\partial \rho}\right|_s \quad . \tag{2.60}$$

Eliminiert man $\left.\frac{\partial e}{\partial \rho}\right|_T$ und $\left.\frac{\partial e}{\partial T}\right|_\rho$ mit Hilfe von (2.58) und (2.59), ergibt sich

$$0 = \frac{P}{\rho^2}(1-\chi_T) - \frac{P}{\rho^2} + c_v\frac{T}{\rho}(\Gamma_3 - 1) \quad , \tag{2.61}$$

und es folgt

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{P\chi_T}{\rho c_v T} \quad . \tag{2.62}$$

Dies ist die Formel (9.93') aus Cox und Giuli (1968), deren Herleitung ich auch im wesentlichen gefolgt bin. Mit Gl. (2.47) und Gl. (2.51) ergibt sich schließlich für den *dritten Adiabatenkoeffizienten*

$$\boxed{\Gamma_3 = \frac{P\Gamma_1}{\rho c_p' T} + 1} \quad . \tag{2.63}$$

Mit (2.39) und (2.41) folgt für den *adiabatischen Temperaturgradienten*

$$\boxed{\nabla_{\mathrm{ad}} = \frac{P}{\rho c_p' T}} \quad . \tag{2.64}$$

Und so ergibt sich mit der Definition für den *zweiten Adiabatenkoeffizienten*

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{1}{1 - \frac{P}{\rho c_p' T}}} \quad . \tag{2.65}$$

Ersetzt man in Gleichung (2.43) χ_T mit Hilfe von (2.38) und löst nach χ_ρ auf, so ergibt sich

$$\chi_\rho = \frac{\Gamma_1}{1 + \delta(\Gamma_3 - 1)} \quad , \tag{2.66}$$

und mit (2.63) erhält man

$$\boxed{\chi_\rho = \frac{\Gamma_1}{1 + \frac{\Gamma_1 \delta P}{T\rho c_p'}}} \tag{2.67}$$

und mit (2.38)

$$\boxed{\chi_T = \frac{\Gamma_1 \delta}{1 + \frac{\Gamma_1 \delta P}{T\rho c_p'}}} \quad . \tag{2.68}$$

Mit (2.51) und (2.47) folgt für die *spezifische Wärme bei konstanter Dichte*

$$c_v = \frac{c_p' \chi_T}{\Gamma_1} \tag{2.69}$$

und mit Gl. (2.68)

$$\boxed{c_v = \frac{c_p' \delta}{1 + \frac{\Gamma_1 \delta P}{T\rho c_p'}}} \quad . \tag{2.70}$$

Mit den Formeln (2.53) und (2.68) folgt für das *Verhältnis der spezifischen Wärmen*

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\delta} + \frac{\Gamma_1 P}{T\rho c_p'}} \quad . \tag{2.71}$$

Zur Charakterisierung geschichteter Atmosphären gibt es weitere wichtige Größen: Aus Gleichung (2.3) ergibt sich für den statischen Fall ($v = 0$, $g_{\mathrm{z,turb}} = 0$, $g_{\mathrm{z,shock}} = 0$) die *Druckskalenhöhe*

$$H_p = \frac{P}{\rho g} \quad . \tag{2.72}$$

Schallwellen, deren Wellenlänge klein gegenüber der Druckskalenhöhe ist und bei denen kein Energieaustausch durch Strahlung auftritt, breiten sich mit der *adiabatischen Schallgeschwindigkeit*

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma_1 P}{\rho}} = \sqrt{\Gamma_1 g H_p} \tag{2.73}$$

aus. Für den Fall, daß die Strahlung sämtliche Temperaturinhomogenitäten, die durch adiabatische Kompression und Expansion entstehen könnten, gleich wieder ausbügelt, geschieht die Schallausbreitung mit der *isothermen Schallgeschwindigkeit*

$$c_T = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \frac{c_s}{\sqrt{\Gamma_1}} \quad . \tag{2.74}$$

In einer isothermen Atmosphäre können sich Schallwellen nur dann als laufende Wellen ausbreiten, wenn ihre Frequenz über der sogenannten *akustische Cutoff-* oder *Grenzfrequenz*

$$\omega_{\mathrm{ac}} = \frac{c_s}{2H_p} = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{\Gamma_1 \rho}{P}} = \frac{g\Gamma_1}{2c_s} \tag{2.75}$$

liegt. Für Schwerewellen gibt es eine obere Grenzfrequenz, die sogenannte *Brunt-Väisälä-Frequenz*

$$\omega_{\mathrm{BV}} = \sqrt{g\left(\frac{1}{H_\rho} - \frac{1}{\Gamma_1 H_p}\right)} \quad . \tag{2.76}$$

Ist sie imaginär, bedeutet dies, daß die Schichtung an diesem Punkt gegen konvektive Störungen instabil ist. Die Dichteskalenhöhe läßt sich auch im statischen Fall nicht direkt aus lokalen thermodynamischen Größen ableiten. Um sie zu bestimmen, muß man die Schichtung zumindest in einer Umgebung des betrachteten Punktes kennen.

Die FORTRAN-Routine GAS berechnet u.a. die *spezifische Enthalpie* h. Aus ihr lassen sich dann weitere Energien bestimmen: Die *spezifische innere Energie* ergibt sich zu

$$\boxed{e_{\mathrm{int}} = h - \frac{P}{\rho}} \quad . \tag{2.77}$$

Die *kinetische Energie* ist

$$\boxed{e_{\mathrm{kin}} = \frac{u^2 + v^2}{2}} \quad , \tag{2.78}$$

und die *potentielle Energie* bezüglich eines frei gewählten Nullpunktes z_0 ergibt sich zu

$$\boxed{e_{\text{pot}} = g(z - z_0)} \quad . \tag{2.79}$$

Die Summe ist die *gesamte Energie*

$$\boxed{e_{\text{tot}} = h - \frac{P}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + g(z - z_0)} \quad . \tag{2.80}$$

Aus der Energie pro Masseneinheit e ergibt sich die Energie pro Volumen E durch Multiplikation mit der Dichte

$$E = e\rho \quad . \tag{2.81}$$

Der zugehörige Fluß ist

$$\vec{F}_e = e\rho\vec{v} \quad . \tag{2.82}$$

Wichtig sind hier besonders der vertikale *Enthalpiefluß*

$$F_h = h\rho v \tag{2.83}$$

und der vertikale *kinetische Energiefluß*

$$F_{\text{kin}} = \frac{u^2 + v^2}{2}\rho v \quad . \tag{2.84}$$

Um den Einfluß planparalleler Schwingungen, das beim Relaxieren mögliche Absacken oder Aufsteigen der Photosphäre oder auch durch die nicht exakte Konservativität des numerischen Schemas verursachte systematische Massen- bzw. Energieflüsse zu eliminieren, wird bei der Auswertung nicht der gesamte Enthalpiefluß nach Gl. (2.83) gemittelt. Stattdessen wird ein korrigierter Wert gemäß

$$F_h(z) = \langle\langle h\rho v\rangle_x - \langle h\rangle_x \langle\rho v\rangle_x\rangle_t \tag{2.85}$$

betrachtet, der aus den von x, z und t abhängigen Größen h, ρ und v den nur noch von z abhängigen gemittelten Enthalpiefluß F_h berechnet. Hier stehen $\langle . \rangle_x$ und $\langle . \rangle_t$ für die räumliche horizontale bzw. die zeitliche Mittelung. Ebenso wird mit dem kinetischen Energiefluß verfahren. Der benutzte zeitlich gemittelte rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit errechnet sich zu

$$v_{\text{rms}}(z) = \langle\sqrt{\langle(v - \langle v\rangle_x)^2\rangle_x}\rangle_t \quad . \tag{2.86}$$

Für die Horizontalgeschwindigkeit gilt das Entsprechende.

2.4 Numerisches Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Problems

Das System aus den Gleichungen (2.1), (2.2), (2.3) und (2.5), ergänzt um die Gleichungen zur Beschreibung des Strahlungstransports und die von der chemischen Zusammensetzung (Tabelle 1) abhängigen Zustandsgleichung (Tabelle 2) und Opazitätstabelle (Tabelle 3), beschreibt, wie sich ein vorgegebenes Anfangsmodell bei festgelegten Randbedingungen mit der Zeit entwickeln wird. Eine analytische Integration des Systems ist jedoch völlig aussichtslos. Erst nach einer räumlichen und zeitlichen Diskretisierung der Gleichungen, der Einführung einiger Näherungen und der Verwendung eines ausgefeilten Programms, das auf einem leistungsfähigen Großrechner ablaufen kann, ist es möglich, sie wenigstens numerisch zu integrieren. Dabei fällt eine ungeheure Datenmenge an, die nachbereitet, analysiert und visualisiert werden muß, um die Dynamik der konvektiven Strömungen sichtbar zu machen, wichtige Effekte herauszukristallisieren und die Datenflut durch geeignete Mittelung auf die wesentlichen Größen zu reduzieren.

Der Hydrodynamik-Teil des Programms basiert auf der Bicharakteristiken-Methode, wie sie von Stefanik et al. (1984) beschrieben wurde (siehe auch Ludwig et al. 1989, Steffen et al. 1989, Gigas 1990, Freytag 1991). Im Rahmen dieser Methode werden die Hydrodynamik-Gleichungen nicht direkt diskretisiert und durch finite Differenzen ersetzt, sondern man macht sich die Theorie der Charakteristiken in hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen zunutze: Ein Punkt (x_0, z_0, t_0) im durch die beiden räumlichen Koordinaten x und z und die zeitliche Koordinate t aufgespannten dreidimensionalen Raum wird nicht durch alle Punkte (x, z, $t < t_0$) beeinflußt, sondern nur durch den Teil, der auf seiner Bahn oder auf seinem Vergangenheits-Charakteristikenkegel liegt. Dieser Kegel ist die Menge aller Punkte im (x,z,t)-Raum, von denen ausgehende Störungen den Punkt (x_0, z_0, t_0) erreicht haben können (also der Machsche Kegel in Vergangenheitsrichtung). Für jeden Punkt in der neuen Zeitebene werden vier auf dem jeweiligen Charakteristikenkegel liegende Bicharakteristiken sowie die Teilchenbahn-Charakteristik auf die alte Zeitebene zurückverfolgt, um aus den Werten der Größen P, T, u und v an den Auftreffpunkten der Charakteristiken auf die alte Zeitebene die neuen Werte zu berechnen. Die dazu notwendige Interpolation wird mit Hilfe von kubischen Polynomen durchgeführt.

Schockfronten werden mit Hilfe einer künstlichen Viskosität über mehrere Gitterpunkte verschmiert, um auch auf sie das Bicharakteristikenschema anwenden zu können und den Algorithmus zu stabilisieren.

Um den wichtigen Beitrag des Strahlungstransportes zur Energiebilanz und seine Nichtlokalität zu berücksichtigen, wird die Strahlungstransportgleichung entlang einer großen wenn auch endlichen repräsentativen Anzahl von Strahlen integriert. Durch eine geeignete Mittelung über die Intensitäten aller Strahlen in jedem Gitterpunkt wird der Nettobetrag der Wärmemenge, die jeweils absorbiert oder emittiert wird, berechnet. Es steht wahlweise ein graues Opazitätsschema oder ein Mehrbandschema (siehe Tabelle 3) zur Verfügung, das die Variation der Opazität mit der Wellenlänge genähert berücksichtigt (siehe Ludwig 1992 und Ludwig, Jordan und Steffen 1994). Es benutzt die Idee des „opacity binning“ (Nordlund 1982, 1984, Nordlund und Dravins 1990), um Frequenzen mit ähnlichen Opazitäten jeweils zu einem Band zusammenzufassen und so mit Hilfe einiger weniger Bänder den Effekt der Frequenzabhängigkeit miteinzubeziehen.

Die für die ersten Modelle Weißer Zwerge verwendeten Opazitätstabellen (zzceti1) enthalten einen für den untersuchten Bereich von Effektivtemperaturen wichtigen Beitrag noch nicht: Viele mit dem International Ultraviolet Explorer (IUE) aufgenommene Spektren von DA Weißen Zwergen zeigen starke Absorptions-Features nahe 1400 und 1600 Å, die einen nicht zu vernachlässigenden Anteil des Flusses schlucken. Sie konnten von zwei Gruppen (Koester et al. 1985, Nelan & Wegner 1985) identifiziert werden: Erzeugt werden sie durch quasimolekulare Absorption von Wasserstoff. Der Satellit bei 1400 Å wird durch Störungen mit H^+ und der Satellit bei 1600 Å wird durch Störungen mit neutralem Wasserstoff erzeugt. Diese Absorptions-Features wurden von Hans-Günter Ludwig in den modifizierten ATLAS6-Code von Kurucz eingebaut, mit dem dann die neuen Opazitätstabellen (davmf und davmfa) berechnet wurden.

Der hydrodynamische Anteil der Gleichungen wird mit einem expliziten Verfahren gelöst. Die Strahlungsrelaxationszeitskala für Temperaturstörungen von der Größe einer Gitterzelle ist jedoch in den Schichten um $\tau = 1$ vielfach wesentlich kleiner als die Courant-Zeit, die Schallaufzeit zur Durchquerung einer Gitterzelle. Daher wird der Strahlungstransportteil mit einem impliziten Verfahren iterativ gelöst, so daß der numerische Zeitschritt weit oberhalb der Strahlungsrelaxationszeit und in der Nähe des Courant-Zeitschrittes liegt. Ein zu kurzer Zeitschritt erfordert zu viele Schritte zur Abdeckung einer vorgegebenen Simulationszeit. Ein zu langer Zeitschritt verlangt zu viele Iterationen bei der Berechnung des Strahlungsfeldes, weil es sich von Zeitpunkt zu Zeitpunkt zu stark ändert. Die in das Programm eingebaute Steuerung sorgt dafür, daß der Zeitschritt nahe am optimalen Wert bleibt und auch nicht den Courant- oder den viskosen Zeitschritt überschreiten kann.

Element	μ	Anzahlbruchteil	Massenbruchteil
H (X)	1.0080	$abuX = 0.90851$	$X = 0.7035$
He (Y)	4.0026	$abuY = 0.09085$	$Y = 0.2793$
Metal (Z)	35.0000	$abuZ = 0.00064$	$Z = 0.0172$

Tabelle 1: Zusammensetzung der angenommenen solaren Mischung: Für jedes Element sind das Molekulargewicht, der Anzahlbruchteil und der Massenbruchteil aufgeführt. Das mittlere Molekulargewicht im nichtionisierten Zustand ohne Molekülbildung ist für eine solare Mischung $\mu = 1.3018$. Für eine reine Wasserstoffatmosphäre ergibt sich natürlich $\mu = \mu_H = 1.0080$.

Name	$\log_{10} T$	$\log_{10} P$	Chemie	Bemerkung
gas	3.18-	-4 - 8	H, He, Metall	Standard, Hauptreihe
gas-h			H	DA Weiße Zwerge
gasgas	3.18-	-4 - 8	H, He, Metall	Exakt, Hauptreihe
gas-sunur			H, He, Metall	Sonne: unterer Rand

Tabelle 2: GAS-Routinen. Diese Routinen berechnen die Zustandsgleichung nicht mit Hilfe einer Tabelle sondern durch Lösen der entsprechenden Gleichungssysteme. Deshalb sind die Gültigkeitsbereiche nicht scharf begrenzt.

2.5 Die gerechneten Modelle im tabellarischen Überblick

Die Tabellen 4 bis 11 enthalten in Kurzform die wichtigsten Daten über die bisher von mir gerechneten Modelle. Sie sind nur als Möglichkeit zum Nachschlagen und als Quelle für gewisse Detailinformationen über bestimmte Modelle gedacht. Der hohe Kompressionsgrad der Information hat die Lesbarkeit nicht gefördert, und so sind die Tabellen eher für Insider gedacht.

Zu den Modellbezeichnungen: Meine eindimensionalen Modelle von A-Stern-Hüllen tragen alle Bezeichnungen der Form TSTzz, wobei zz für eine zweistellige Zahl steht. Die ersten zweidimensionalen Modelle tragen eine Namen wie AyV_zz. Hier steht AyV für den Spektraltyp A0V, A3V oder A5V, und zz ist wieder eine zweistellige Nummer. Diese Modelle haben alle eine Schwerebeschleunigung von $\log g$=3.9 und eine so hohe Effektivtemperatur, daß sich keine oder keine nennenswerte Konvektion einstellt. Bei den restlichen Modellen wurde dann eine einheitliche Bezeichnungsweise durchgehalten. Sie besitzen Namen der Form ATxxgyyNz, FTxxgyyNz oder ZTxxxgyyNz. Der erste Buchstabe gibt den Typ des Sterns an: „A“-Stern, „F“-Stern oder Weißer Zwerg („Z“Z Ceti).

Name	$\log_{10} T$	$\log_{10} P$	Chemie	Bemerkung
a0v	3.5 - 4.5	0.0 - 5.0	solar	A-Sterne
a0v.big	3.5 - 5.0	0.0 - 7.0	solar	A-Sterne, tief
bg.nohe	3.3 - 5.0	0.0 - 7.0	H	A-Sterne, ohne Helium
big.grey	3.3 - 5.0	0.0 - 7.0	solar	A-Sterne, tief, nur grau
davmf	3.7 - 5.0	2.0 - 8.0	H	DA-Weiße Zwerge: mit Feature
davmfa	3.7 - 5.0	2.0 -10.0	H	DA-Weiße Zwerge: tief, mit Feature
f5v	3.3 - 4.3	1.0 - 6.0	solar	A- und F-Sterne
g2v	3.3 - 4.3	1.0 - 6.0	solar	Sonne
g2va	3.3 - 4.5	1.0 - 8.0	solar	Sonne, tief
zzceti1	3.7 - 5.0	2.0 - 8.0	H	DA-Weiße Zwerge: ZZ Ceti

Tabelle 3: Tabelle mit Daten der verwendeten Opazitätsdateien: Name der Datei mit der Opazitätstabelle, logarithmischer Temperaturbereich, logarithmischer Druckbereich, Elementmischung (solar oder reiner Wasserstoff), Bemerkungen.

Der nächste Buchstabe ist immer ein T und steht für „T“emperatur. Die folgenden zwei oder drei Ziffern (xx oder xxx) geben die Effektivtemperatur an ($T_{\text{eff}} = xx * 100\,\text{K}$. Es folgt ein g für „g“ravity (Schwerebeschleunigung), die sich aus den nächsten beiden Ziffern gemäß $\log g = yy/10$ (in cgs-Einheiten) ergibt. Dann kommt ein N für „N“ummer und eine ein- oder zweistellige Versionsnummer.

Die eindimensionalen Modelle (TSTzz) dienten hauptsächlich zum Studium der abklingenden oder auch ansteigenden planparallelen Schwingungen in heißen A-Stern-Modellen oder auch der Konstruktion von statischen Anfangsmodellen, da starke Schwingungen die schwachen konvektiven Strömungsfelder in diesen Sternen leicht verdecken können.

Die ersten zweidimensionalen Modelle (A0V_01 bis AT80g39N1) haben noch eine so hohe Effektivtemperatur, daß sich zumindest in der relativ kurzen Simulationszeit keine Konvektion entwickeln kann. In den Wega-Modellen ($T_{\text{eff}} = 9\,500\,\text{K}$, $\log g = 3.90$) liegt die numerische Rayleigh-Zahl aufgrund der extrem kurzen radiativen Zeitskalen scheinbar noch unterhalb des kritischen Wertes (siehe Abschnitt 3.7), so daß die anfangs eingefügten Störungen sogar noch abklingen.

Erst ab Modell AT85g41N1 sind die Simulationen von Hauptreihensternen erfolgreich und zeigen eine oder zwei Konvektionszonen.

Die Modelle Weißer Zwerge in den Tabellen 10 und 11 sind nicht chronologisch sondern nach Effektivtemperatur und Modellnummer geordnet. Das erste hat die Bezeichnung ZT130g80N1. Hier konnte ich als Startmodell auf eine erfolgreiche Rechnung von Hans-Günter Ludwig zurückgreifen (sein Modell Z90D2579).

Modell	T_{eff} log$g$	Gitter km^2	Rand Int.	Zeit KTIME	Code Str.	Start-modell	Eigenschaften
TST01	9500	4∗30	k/p/3	880-11273s	651	A65DA9	$V \sim$ 2km/s
	3.90	450∗5670	zu/zu	3115-34070	grau	Spalte 1-4	exponentiell abklingend
TST02	9500	4∗30	k/p/3	0-8278s	651	TST01;10	$V \sim$ 0.5km/s
	3.90	450∗5670	zu/zu	0-23470	grau	V:=0	abklingend
TST03	9500	4∗30	k/p/3	0-14282s	651	TST02;7	$V \sim$ 0.2km/s
	3.90	450∗5670	zu/zu	0-42920	grau	V:=0	wachsend, abklingend
TST04	9500	4∗30	k/p/2	9255-15900s	651	TST03;9	Interpolation geändert
	3.90	450∗5670	zu/zu	27320-46525	grau		$V(t), p(t), T(t)$ glatter
TST05	9500	4∗45	k/p/2	15902-24440s	651	TST04f	$V(t), p(t), T(t)$ glatter
	3.90	450∗5670	zu/zu	46530-71075	grau	30→45Pkte	P=1036,536,378,293,243s
TST06	9500	4∗45	k/p/2	0-4561s	651	TST05	immer wieder V:=0
	3.90	450∗5670	zu/zu	0-15540	grau	V:=0	$V \sim$ 250m/s→1m/s
TST07	9500	4∗45	k/p/2	1595-1638.69s	651	TST06;39	Spike
	3.90	450∗5670	zu/zu	4695-4825	grau	V:=0, Pr=1	
TST08	9500	4∗45	k/p/2	1595-1638.77s	651	TST06;39	kein Spike
	3.90	450∗5670	zu/zu	4695-4819	grau	V:=0, Pr=0.1	
TST09	9500	4∗45	k/p/2	1595-1639.41s	651	TST06;39	Spike
	3.90	450∗5670	zu/zu	4695-4829	grau	V:=0, Pr=10	etwas kleiner als für Pr=1
TST10	9500	4∗35	k/p/2	0-10265s	651	TST05n	
	3.90	450∗4780	zu/zu	0-31935	grau	5670▷4780km	P=935,462,311,230,(180)s
TST11	9500	4∗45	k/p/2	1595-1642.42s	653	TST06;39	HD-Code neu, DLIMIT=1
	3.90	450∗5670	zu/zu	4695-4825	grau	V:=0	Zeitschritt etwas größer
TST12	9500	4∗45	k/p/2	1595-1640.76s	653	TST06;39	DLIMIT=0.1
	3.90	450∗5670	zu/zu	4695-4817	grau	V:=0	Zeitschritt etwas größer
TST13	9500	4∗45	k/p/2	1595-1634.48s	653	TST06;39	DLIMIT=0.4
	3.90	450∗5670	zu/zu	4695-4811	grau	V:=0	
TST14	9500	4∗45	k/p/2	0-917s	651	TST06;58	DLIMIT=0.1
	3.90	450∗5670	zu/zu	0-2675	grau	V:=0	falsche HD-Version
TST15	9500	4∗45	k/p/2	0-3499s	653	TST06;58	DLIMIT=0.1
	3.90	450∗5670	zu/zu	0-10400	grau	V:=0	+Störung im V-Feld
TST16	9500	36∗45					
A0V_01	3.90	2D					

Tabelle 4: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Die erste Spalte enthält die auf Seite 27 erläuterte Modellbezeichnung. Die zweite gibt die vorgegebene Effektivtemperatur des Modells in Kelvin und den dekadischen Logarithmus der Schwerebeschleunigung in cgs-Einheiten an. Die dritte Spalte gibt übereinander an: Anzahl der horizontalen Gitterpunktzahl ∗ Anzahl der vertikalen Gitterpunktzahl, Modellbreite in Kilometern ∗ Modellhöhe in Kilometern. Eine horizontale Gitterpunktzahl von 3 oder 4 heißt, daß die Simulation nur eindimensional war. In der vierten sind kodiert einige Informationen über die Randbedingungen enthalten: Obere Zeile: Der erste Buchstabe (k) kennzeichnet die (allerdings in allen meinen Modellen beibehaltene) kartesische Geometrie, der zweite (p) die (ebenfalls nicht variierten) seitlichen periodischen Randbedingungen, die abschließende Ziffer die verwendete Interpolationsart (2 für die normalerweise verwendete kubische, 3 für die monotone (siehe Steffen 1990)). Untere Zeile: Untere Randbedingung (zu) und obere Randbedingung (zu oder auf). Exponenten kennzeichnen verschiedene Versionen. Die fünfte Spalte gibt Start- und Endzeitpunkt in Sekunden (oben) und in Rechenschrittnummern (unten) an. Die sechste Spalte enthält die Programmversion (oben) und Informationen über den Strahlungstransport: A-Stern: (kein/grau/bunt), Weiße Zwerge: Opazitätsdatei (Fettdruck heißt, daß nichtgraue Opazitätstabellen verwendet wurden). Die siebte Spalte gibt Informationen über das Startmodell: Entweder über die Bezeichnung des Vorgängermodells mit eventuell sehr knappen Angaben über Modifikationen, oder die Art der Konstruktion des Startmodells. Die achte und letzte Spalte schließlich gibt mehr oder weniger willkürlich ausgewählte wichtige Informationen über das Modell.

Modell	$T_{\rm eff}$ log$g$	Gitter km^2	Rand Int.	Zeit KTIME	Code Str.	Start-modell	Eigenschaften
TST17	9000	4*45	k/p/2	0-1893s	653	TST15;1	immer wieder V:=0
	3.90	450*5372	zu/zu	0-4505	grau	T, z skaliert	
TST18	9000	4*45	k/p/2	0-152s	633r	TST17	immer wieder V:=0
	3.90	450*5372	zu/zu	0-380	grau	$z+\Delta z$	
TST19	9000	4*45	k/p/2	0-2257s	653r	TST18	immer wieder V:=0
	3.90	450*5372	zu/zu	0-4850	grau	$z+\Delta z$	→statisches Modell
TST20	9000	4*45	k/p/2	464-18546s	653r	TST19;10	$V_{\max}$ steigt von 1km/s
	3.90	450*5372	zu/zu	1105-39535	grau		auf 3km/s
TST21	8500	4*45	k/p/2	0-1189s	653r	TST19;43	immer wieder V:=0, V nimmt
	3.90	420*5074	zu/zu	0-2340	grau	umskaliert	kaum ab, Masse verschwindet
TST22	8500	4*45	k/p/2	0-311s	653r	TST21;19	immer wieder V:=0, V nimmt
	3.90	420*5074	zu/zu	0-665	grau		kaum ab, Masse verschwindet
TST23	8500	4*45	k/p/2	0-63s	653r	TST21;1	immer wieder V:=0
	3.90	420*5074	zu/zu	0-2484	grau		VISNY=–75
TST24	9500	4*45	k/p/2	0-2741s	653r	TST05;1	VISNY=0
	3.90	450*5670	zu/zu	0-7880	grau		keine Veränderung geg. TST05
TST25	9500	4*45	k/p/2	0-10449s	653r	TST05;1	wachs. Schwingungen, P=379sec
	3.90	450*5670	zu/zu	0-44255	bunt		IFCO=2
TST26	8500	4*45	k/p/2	0-903s	653r	TST21;1	immer wieder V:=0
	3.90	420*5074	zu/zu	0-2415	grau		VISNY=–7.5
TST27	9000	4*45	k/p/2	1046-33806s	653r	TST19;20	$V_{\max}$ steigt von 0.1km/s
	3.90	450*5372	zu/zu	2295-72950	grau		auf 3.3km/s, wird stationär
TST28	8500	4*45	k/p/2	0-289s	653r	TST26;	immer wieder V:=0
	3.90	420*5074	zu/zu	0-790	grau	$z+\Delta z$	VISNY=–7.5
TST29	8500	4*45	k/p/2	0-698s	653r	TST28;	immer wieder V:=0
	3.90	420*5074	zu/zu	0-1835	grau	$z+\Delta z$	VISNY=–7.5
TST30	8500	4*45	k/p/2	0-728s	653r	TST29;	immer wieder V:=0
	3.90	420*5074	zu/zu	0-4030	grau	$z+\Delta z$	VISNY=–7.5
TST31	9500	4*45	k/p/2	0-697s	653r	TST05m	DLIMIT=1.0
	3.90	450*5670	zu/zu	0-2020	grau		
TST32	9500	4*45	k/p/2	0-283s	653r	TST05m	DLIMIT=1.0, Limit1,2,3 hoch
	3.90	450*5670	zu/zu	0-705	grau		Zeitschritt kaum größer,
TST33	9500	4*45	k/p/2	0-1450s	666	TST05m	DLIMIT=1.0 Limit1,2,3 höher
	3.90	450*5670	zu/zu	0-510	grau	neu	2* so schnell
TST34	9500	4*45	k/p/2	0-1649s	666	TST05m	DLIMIT=1.0 Limit1,2,3 höher
	3.90	450*5670	zu/zu	0-850	grau	neu	
TST35	9500	4*45	k/p/2	0-1298s	666	TST05m	DLIMIT=1.0 Limit1,2,3 höher
	3.90	450*5670	zu/zu	0-540	grau	neu	γ=0.45

Tabelle 5: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Modellbezeichnung / Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung / Gitterpunkte und Modellmaße / Symmetrie und Interpolation sowie Randbedingungen / simulierte Zeit / Programmversion, Strahlungstransport / Startmodell / wichtige Eigenschaften. Für nähere Erläuterungen siehe Tabelle 4.

Modell	$T_{\rm eff}$ $\log g$	Gitter km^2	Rand Int.	Zeit KTIME	Code Str.	Start- modell	Eigenschaften
TST36	8500 3.90	3∗45 280∗5074	k/p/2 zu/zu	0-14937s 0-79930	653r grau	TST30; i reduziert	Oszillationen (P=345sec) erreichen stationären Zustand
TST37	9500 3.90	3∗45 300∗5670	k/p/2 zu/zu	0-55244s 0-19512	668 grau	TST05m neu	Sehr langsam (t∼20000sec) wachs. Oszillationen, P=376,6sec
TST38	8500 3.90	3∗51 200∗5000	k/p/2 zu/zu	0-12341s 0-8628	668 grau	TST36.F50 j vergrößert	Wachsende Osz., Beseitigung eines Fehlers am oberen Rand
TST39	9500 3.90	3∗45 300∗5670	k/p/2 zu/zu	0-26627s 0-75666	668 kein	TST05m neu	Wachsende und wieder abfallende Oszillationen, P=150sec
TST41	9500 3.90	3∗45 300∗5670	k/p/2 zu/auf	0-31858s 0-10974	668 grau	TST05m neu	Oszillationen klingen ab.. Masse nimmt zu.
TST42	9000 3.90	3∗45 300∗5372	k/p/2 zu*/auf	0-34251s 0-11937	668 grau	TST19;20 neu	Oszillationen klingen ab. Masse zwangsweise konstant.
TST43	8500 3.90	3∗51 200∗5000	k/p/2 zu*/auf	0-16882s 0-11433	668 grau	TST38.F50;1	Oszillationen klingen langsam ab.
TST44	8000 3.90	3∗51 200∗	k/p/2 zu*/auf	0-412s 0-1458	668 grau	TST43m.F50 T, x skaliert	heftige Oszillationen Absturz: $P_{\rm bot} \to 0$ $\Delta t \to 0$
TST45	8250 3.90	3∗51 200∗4853	k/p/2 zu*/auf	0-10265s 0-13467	668 grau	TST43m.F50 T, x skaliert	sehr dynamisch ab und zu V:=0
TST46	8250 3.90	3∗51 200∗4853	k/p/2 zu*/auf	0-9542s 0-12816	668 grau		ab und zu V:=0 Modell wird stationär
TST47	8000 3.90	3∗51 200∗4706	k/p/2 zu*/auf	0-1311s 0-2097	668 grau		Absturz: $P_{\rm bot} \to 0$ $\Delta t \to 0$
TST48	8000 3.90	3∗51 200∗4706	k/p/2 zu*/auf	0-446s 0-726	668 grau		Absturz: $P_{\rm bot} \to 0$ $\Delta t \to 0$
TST49	8000 3.90	3∗51 200∗4706	k/p/2 zu*/auf	0-3929s 0-7707	668 grau		Mehrmals: v:=0 Modell wird stationär.
TST50	8000 3.90	3∗45 200∗4765	k/p/2 zu*/auf	0-1610s 0-3480	668 grau		Einmal: v:=0 Modell wird stationär.
TST51	8500 4.13	3∗51 1320∗13935	k/p/2 zu/zu*	0-671s 0-1296	668 grau	graue Int. GAS falsch	Absturz, Zeitschritt wird klein F07-File wird nicht geschrieben.
TST52	8500 4.13	3∗40 140∗5687	k/p/2 zu/zu*	0-13376s 0-9227	668 grau	graue Int. GAS falsch	Wachsende Oszillationen P=432sec
TST53	8500 4.13	3∗40 140∗5687	k/p/2 zu/zu*	0-5217s 0-2850	668 grau	TST52 v:=0	Wiederholt v:=0 Modell wird nahezu stationär
TST54	9500 3.90	3∗35 200∗4732	k/p/2 zu/zu	0-28340s 0-11086	668 grau	TST10	Wachs. Oszillationen, P=228sec trotz fehlender Viskosität
TST55	8500 4.13	3∗51 140∗10502	k/p/2 zu*/auf	0-12653s 0-6393	670 grau	TST53 + Diff.-Näh.	Nur sehr schwache Oszillationen Fast stationäres Modell
TST56	8500 4.13	3∗51 140∗14048	k/p/2 zu*/auf	0-630s 0-1278	668/70 grau	TST55 + Diff.-Näh.	Absturz wie TST51
TST57	8500 4.13	3∗48 140∗12247	k/p/2 zu*/auf	0-6757s 0-3393	670 grau	TST56 + Diff.-Näh.	
TST58	8500 4.13	3∗51 140∗14229	k/p/2 zu*/auf	0-21669s 0-10815	670 grau	TST57f + Diff.-Näh.	Oszillationen klingen ab. Modell wird stationär.
TST59	8500 4.13	3∗54 140∗16430	k/p/2 zu*/auf	0-5605s 0-2793	672 grau	TST58p + Diff.-Näh.	Nur kleine Fluktuationen. Modell bleibt stationär.

Tabelle 6: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Modellbezeichnung / Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung / Gitterpunkte und Modellmaße / Symmetrie und Interpolation sowie Randbedingungen / simulierte Zeit / Programmversion, Strahlungstransport / Startmodell / wichtige Eigenschaften. Für nähere Erläuterungen siehe Tabelle 4.

Modell	T_{eff} $\log g$	Gitter km^2	Rand Int.	Zeit KTIME	Code Str.	Start- modell	Eigenschaften
TST60	8500 4.13	3∗57 1400∗18836	k/p/2 zu*/auf	0-16804s 0-8412	672 grau	TST59e + Diff.-Näh.	Endmodell nahezu stationär v_{ss} =10m/s, aber $v_{\text{mean}} \neq 0$
TST61	8500 4.13	3∗57 1400∗18836	k/p/3 zu*/auf	0-5626s 0-2655	672 grau	TST60n mon. I.	Endmodell nahezu stationär v_{ss} =10m/s, aber $v_{\text{mean}} \neq 0$
TST62	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/3 zu*/auf	0-10936s 0-22440	672 grau	TST61 $z(j)$ neu	Wachsende Schwing. (P=380sec) Störungen gehen vom Boden aus.
TST63	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/3 zu/auf	0-8195s 0-15600	672 grau	TST61 $z(j)$ neu	Wachsende Schwingungen „Normales“ Wachstumsverhalten
TST64	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/3 zu/auf	0-8275s 0-10380	680 grau	TST61 $z(j)$ neu	Wachsende Schwing., Massenverlust Störungen gehen vom Boden aus.
TST65	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/3 zu*/auf	0-7204s 0-15540	680 grau	TST61 $z(j)$ neu	Wachsende Schwingungen Störungen gehen vom Boden aus.
TST66	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/3 zu*/auf	0-7390s 0-15595	681 grau	TST61 $z(j)$ neu	Wachsende Schwingungen Störungen gehen vom Boden aus.
TST67	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/3 zu/auf	0-12235s 0-15135	681+ grau	TST61 $z(j)$ neu	Massenverlust, ca. 9000sec Ruhe, dann plötzlich Störungen
TST68	9500 4.40	3∗35 200∗4203	k/p/3-2 zu*/auf	0-16082s 0-17316	681+ grau	graues Modell	IPARSP=3: Störungen vom Boden IPARSP=2: Eine wachs. Mode (2)
TST69	9500 4.40	3∗35 200∗4203	k/p/2 zu/auf	0-4764s 0-5325	681+ grau	graues Modell	leichter Massengewinn, stabil +-+-+-Instabilitäten durch kleines γ
TST70	9500 4.40	3∗35 200∗4203	k/p/2 zu/auf	0-4026s 0-8637	682 grau	graues Modell	Vom Gebiet um τ=1 gehen pathologische Störungen aus.
TST71	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/2 zu*/auf	0-5905s 0-10623	672 grau	TST61 $z(j)$ neu	Modell ist leidlich stabil bis auf kurzperiodische Wellen (oben)
TST72	7400 4.30	3∗61 1300∗17021	k/p/2 zu*/auf	0-7081s 0-862	672 grau	graues Modell	Extremes Gitterverhältnis, Störungen (1km/s) im oberen Bereich
TST73	7400 4.30	3∗61 400∗13371	k/p/2 zu*/auf	0-8486s 0-9138	672 grau	graues Modell	Weniger extremes Gitterverhältnis, abklingende Eigenmoden
TST74	7400 4.30	3∗61 240∗13681	k/p/2 zu*/auf	0-9723s 0-7929	672 grau	graues Modell	Gegenüber TST73 DR verkleinert, nach oben erweitert.
TST75	9500 4.40	3∗57 300∗11978	k/p/2 zu*/auf	0-7103s 0-9942	672 grau	graues Modell	Abklingende Eigenmoden
TST76	9000 4.40	3∗65 280∗11372	k/p/2 zu*/auf	0-12746s 0-14721	677 grau	graues Modell	Schwingungsamplituden etwa konstant, stationär nach zeitlicher Mittelung
TST77	7400 4.30	3∗73 110∗13652	k/p/2 zu*/auf	0-1772s 0-1626	677 grau	graues Modell	Störungen klingen ab, noch nicht stationär
TST78	8500 4.40	3∗65 280∗10987	k/p/2 zu*/auf	0-6471s 0-6240	677 grau	graues Modell	Schwingungsampl. nehmen langsam ab, stationär nach zeitlicher Mittelung
TST79	8000 4.40	3∗65 180∗5011	k/p/2 zu*/auf	0-6142s 0-8148	677 grau	graues Modell	Schwingungsampl. nehmen langsam zu, stationär nach zeitlicher Mittelung
TST80	8000 4.40	3∗65 180∗5011	k/p/2 zu+/auf	0-452s 0-567	691 grau	graues Modell	Massenfluß am Boden wird glatt.
TST81	8500 4.13	3∗53 400∗8853	k/p/3 zu+/auf	0-7546s 0-15213	691 grau	wie TST62	Wachsende Schwingungen, Störungen gehen vom Boden aus.
TST82	9500 4.40	3∗65 400∗15295	k/p/3 zu+/auf	0-12708s 0-16689	691 grau	graues Modell	Langsam abklingende Schwingungen, Mehrere Moden sichtbar.
TST83	7500 4.40	3∗75 120∗4559	k/p/3 zu+/auf	0-7894s 0-13956	691 grau	graues Modell	Rasch abklingende Schwingungen, Eine Mode

Tabelle 7: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Modellbezeichnung / Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung / Gitterpunkte und Modellmaße / Symmetrie und Interpolation sowie Randbedingungen / simulierte Zeit / Programmversion, Strahlungstransport / Startmodell / wichtige Eigenschaften. Für nähere Erläuterungen siehe Tabelle 4.

Modell	$T_{\rm eff}$	Gitter	Rand	Zeit	Code	Startmodell	Eigenschaften
	$\log g$	km^2	Int.	KTIME	Str.		
A0V_01	9500	36∗45	k/p/2	0-1327s	653	TST06;58	DLIMIT=0.1
	3.90	5250∗5670	zu/zu	0-3945	grau	V:=0,	+Störung (30m/s) im v-Feld
A0V_02	9500	36∗45	k/p/2	0-1491s	653	TST06;58	+Störung (300m/s) im v-Feld
	3.90	5250∗5670	zu/zu	0-4435	grau	V:=0,	keine anwachsende Konvektion
A0V_03	9500	73∗45	k/p/2	0-2525s	653	A0V_01	DLIMIT=0.1, Störung
A0V_04	3.90	21600∗5670	zu/zu	0-7509	grau		(random+sinus) im v-Feld
A0V_05	9500	73∗45	k/p/2	0-800s	653	wie A0V_03	Strahlungstransport ausgeschaltet
	3.90	21600∗5670	zu/zu	0-2379	aus		
A0V_06	9500	73∗45	k/p/2	0-730s	653	wie A0V_03	hor. Ausdehnung verkleinert
	3.90	2160∗5670	zu/zu	0-2304	grau		
A0V_07	9500	36∗45	k/p/2	87-1955s	653	A0V_02b_dist	ohne Strahlung,
	3.90	5250∗5670	zu/zu	260-5815	aus		dramatische Strömung
A0V_08	9500	36∗45	k/p/2	260-1728s	653	A0V_01b_dist	Viskosität:=0, K./ wächst nicht
	3.90	5250∗5670	zu/zu	87-5140	grau		+Störung (30m/s) im v-Feld
A3V_01	9000	36∗45	k/p/2	0-116s	653	TST19	Störung zu hoch in
	3.90	5250∗5372	zu/zu	0-245	grau	+Störung	der Atmosphäre
A3V_02	9000	36∗45	k/p/2	0-2127s	653	TST19	Kinetische Energie klingt erst ab,
	3.90	5250∗5372	zu/zu	0-4495	grau	+Störung	steigt ab t=800sec langsam an
TST40	8500	18∗51	k/p/2	0-30601s	668	TST36;1	Osz. wachsen schnell, Konv.
A5V_01	3.90	1700∗5000	zu/zu	0-21552	grau	+Störung	wächst langsam: t_v = 4000sec
AT82g39N1	8250	18∗51	k/p/2	0-2011s	668		Oszillationen klingen ab,
	3.90	1600∗4853	zu*/auf	0-2733	grau	+Störung	Konvektion wächst: t_v = 1920sec
AT80g39N1	8000	18∗45	k/p/2	0-13067s	668		wachsende Oszillationen
	3.90	1600∗4764	zu*/auf	0-14966	grau	+Störung	Konvektion wächst: t_v = 1250sec
AT85g41N1	8500	42∗57	k/p/2	0-13079s	672	TST60	2 Konvektionszonen: K. wächst
	4.13	28000∗18837	zu*/auf	0-7759	grau	+Störung	unten langsam, oben schnell
AT85g41N2	8500	42∗57	k/p/2	0-4526s	672	AT85g41N1	2 Konvektionszonen
	4.13	28000∗18837	zu*/auf	0-2321	grau	v vergrößert	keine wachsenden Oszillationen
AT85g41N3	8500	42∗57	k/p/2	0-16021s	672	AT85g41N2	2 Konv.-zonen, $E_{\rm kin}$ maximal
	4.13	28000∗18837	zu*/auf	0-14953	grau	v vergrößert	keine wachsenden Oszillationen
AT85g41N4	8500	42∗35	k/p/2	9988-28073s	672	AT85g41N3ki	1 Konvektionszone
	4.13	28000∗6047	zu*/auf	8467-33569	grau	Oberteil	anwachsende Oszillationen
AT85g41N5	8500	73∗35	k/p/2	9988-17048s	672	AT85g41N3ki	1 Konvektionszone
	4.13	12425∗6047	zu*/auf	8467-18401	grau	$\frac{1}{2}$Oberteil	wachsende Oszillationen
AT85g41N6	8500	42∗35	k/p/3	28079-28932s	672	AT85g41N4	Absturz: Massenflußsteuerung
	4.13	28000∗6047	zu*/auf	33569-36773	grau	Endmodell	beißt sich mit m. Interpolation
AT85g41N7	8500	72∗53	k/p/2	0-11549s	672	TST71	1 tiefreichende Konvektionszone
	4.13	14000∗8853	zu*/auf	0-22788	grau	Endmodell	wachsende Oszillationen
FT74g43N1	7400	52∗61	k/p/2	0-2074s	672	TST73	oben schnell wachsende Konv.
	4.30	10000∗13374	zu*/auf	0-2733	grau	+ Störung	Absturz: oben horizont. Gezappel
FT74g43N2	7400	62∗61	k/p/2	0-2550s	672	TST74	oben schnell wachsende Konv.
	4.30	7200∗13681	zu*/auf	0-2893	grau	+ Störung	Absturz: oben horizont. Gezappel
FT74g43N3	7400	62∗61	k/p/2	0-4689s	677	wie	oben schnell wachsende Konv.
	4.30	3000∗13681	zu*/auf	0-6510	grau	FT74g43N2	Absturz: Massenflußsteuerung
AT95g44N1	9500	62∗57	k/p/2	0-4414s	677	TST75	Wachs. Osz. mit großem n
	4.40	9000∗11973	zu*/auf	0-6715	grau	+Störung	und $k \neq 0$, $P \sim$90s, Quelle: Boden
AT90g44N1	9000	62∗65	k/p/2	0-20010s	677	TST76	2 Konvektionszonen, $v \sim$ 3km/s
	4.40	8400∗11369	zu*/auf	0-24711	grau	+Störung	$F_{\rm ent} \sim 0.07\%$, $F_{\rm kin} \sim -0.003\%$
FT74g43N4	7400	62∗51	k/p/2	0-2425s	677	FT74g43N4dt	$F_{\rm ent} \sim 67\%$, $F_{\rm kin} \sim -8\%$
	4.30	3000∗5202	zu*/auf	0-4824	grau	j kleiner	Absturz: $p_{\rm bot} \to 0$, Störungen

Tabelle 8: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Modellbezeichnung / Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung / Gitterpunkte und Modellmaße / Symmetrie und Interpolation sowie Randbedingungen / simulierte Zeit / Programmversion, Strahlungstransport / Startmodell / wichtige Eigenschaften. Für nähere Erläuterungen siehe Tabelle 4.

Modell	$T_{\rm eff}$	Gitter	Rand	Zeit	Code	Startmodell	Eigenschaften
	log$g$	km^2	Int.	KTIME	Str.		
AT85g44N1	8500	62*65	k/p/2	0-10262s	677	TST78	$F_{\rm ent} \sim 1.8\%$, $F_{\rm kin} \sim -0.06\%$
	4.40	8400*10987	zu*/auf	0-18909	grau	+Störung	
AT80g44N1	8000	62*65	k/p/2	0-3300s	677	TST79	Nur eine Zelle, Störung am Deckel
	4.40	5400*5011	zu*/auf	0-11686	grau	+Störung	$F_{\rm ent} \sim 22\%$, $F_{\rm kin} \sim -2.6\%$
AT90g44N2	9000	62*65	k/p/2	0-12051s	677	AT90g44N1	Pr=10^6
	4.40	8400*11369	zu*/auf	0-15399	grau	yge	$F_{\rm ent} \sim 0.1\%$, $F_{\rm kin} \sim -0.03\%$
AT85g44N2	8500	62*71	k/p/2	0-10010s	677	AT85g44N1	$F_{\rm ent} \sim 1.7\%$, $F_{\rm kin} \sim -0.06\%$
	4.40	8400*13505	zu*/auf	0-21642	grau	ma + 6P.	
AT95g44N2	9500	62*65	k/p/2	0-8046s	691	TST82	Wellen wie bei AT95g44N1.
	4.40	12000*15291	zu*/auf	0-11925	grau	AT90g44N1	$F_{\rm ent} \sim 0.003\%$, $F_{\rm kin} \sim -0.0001\%$
AT85g44N3	8500	62*71	k/p/3	0-1994s	677	AT85g44N1	monotone Interpolation,
	4.40	8400*13505	zu*/auf	0-5908	grau	ma + 6P.	Absturz
AT90g44N3	9000	62*65	k/p/2	0-1645s	677	AT90g44N1	ν=-0.075
	4.40	8400*11369	zu*/auf	0-2993	grau	yge	Zeitschritt wird klein
AT85g44N4	8500	62*71	k/p/2	0-5049s	677	AT85g44N1	$F_{\rm ent} \sim 1.7\%$, $F_{\rm kin} \sim -0.06\%$
	4.40	8400*13505	zu*/auf	0-9936	bunt	ma + 6P.	Wenig Einfluß der Nichtgrauheit
AT85g44N5	8500	62*31	k/p/2	0-1760s	692	AT85g44N2xas	Neue obere Randbedingung
	4.40	25200*10388	zu*/zu^S	0-1126	grau	*3	nicht korrekt.
AT85g44N6	8500	62*71	k/p/2	0-4043s	677	AT85g44N1	VISNY=-0.5
	4.40	8400*13505	zu*/auf	0-11935	grau	ma + 6P.	Zeitschritt wird klein.
AT85g44N7	8500	62*31	k/p/2	0-533s	677	AT85g44N2xas	Falscher HD-Code
	4.40	25200*10388	zu*/zu^S	0-1099	grau	*3	
AT85g44N8	8500	62*31	k/p/2	0-260051s	692	AT85g44N2xas	Neue obere Randbedingung korrekt.
	4.40	25200*10388	zu*/zu^S	0-69700	grau	*3	
AT85g44N9	8500	62*31	k/p/2	80330s	692	AT85g44N	Test der neuen oberen Randbedingung
	4.40	25200*10388	zu*/zu^S	22286	grau		2*1 Zeitschritt
AT85g44N01	8500	122*31	k/p/2	0-252660s	692	AT85g44N8ii	Mehrere Abströmgebiete
	4.40	50400*10388	zu*/zu^S	0-66663	grau	*2	
AT95g44N3	9500	62*65	k/p/2	0-2563s	691	AT95g44N2	Wellen wie bei AT95g44N2.
	4.40	12000*15291	zu/auf	0-3660	grau		
AT95g44N4	9500	62*65	k/p/2	0-12319	694	AT95g44N3	Horizontale Bewegungen
	4.40	12000*15291	zu/auf	0-17180	grau		dominieren.
AT75g44N1	7500	62*75	k/p/2	0-3300s	677	TST83	Nur eine Zelle, Störungen oben
	4.40	3600*4559	zu*/auf	0-8064	grau	+Störung	$F_{\rm ent} \sim 60\%$, $F_{\rm kin} \sim -13\%$
AT80g44N2	8000	62*89	k/p/2	0-503s	677	AT80g44N1	Nur eine Zelle, Störungen oben
	4.40	4200*5011	zu*/auf	0-4176	grau		
AT75g44N2	7500	62*75	k/p/2	0-289s	694	AT75g44N1	Nur eine Zelle, Störungen oben
	4.40	3600*4559	zu*/auf	0-1686	grau		Absturz: Δt wird klein.
AT80g44N3	8000	62*65	k/p/2	0-1505s	694	AT80g44N1	Nur eine Zelle, neue Viskosität dämpft.
	4.40	5400*5011	zu*/auf	0-5940	grau		Kein Druckmax. über Abströmgebiet
AT75g44N3	7500	122*85	k/p/2	0-5897s	698	AT75g44N1	Leidlich guter Lauf, Volumen zu klein,
	4.40	7200*5758	zu*/auf	0-23709	grau		Absturz: Δt wird klein.
AT80g44N4	8000	122*65	k/p/2	0-13082s	698	2*	Ein dominierender, n. links laufender
	4.40	10800*5011	zu*/auf	0-51795	grau	AT80g44N3hx	Jet + kleine konv. Instabilitäten
AT80g44N5	8000	182*95	k/p/2	0-3096s	702	AT80g44N4kz	2 Konvektionsz., oben mehrere n. links
	4.40	16200*12393	zu*/auf	0-17223	grau	+grau	laufende Zellen, verringerter Fluß
AT85g44N02	8500	62*71	k/p/2	0-6750s	698	AT85g44N2	Horizontalbewegungen dominieren
	4.40	8400*13505	zu*/auf	0-13215	grau		
AT85g44N03	8500	122*46	k/p/2	0-235520s	705	AT85g44N01	Mehrere Abströmgebiete,
	4.40	50400*16687	zu*/zu^S	0-69906	grau	+grau	tiefes Undershoot-Gebiet

Tabelle 9: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Modellbezeichnung / Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung / Gitterpunkte und Modellmaße / Symmetrie und Interpolation sowie Randbedingungen / simulierte Zeit / Programmversion, Strahlungstransport / Startmodell / wichtige Eigenschaften. Für nähere Erläuterungen siehe Tabelle 4.

Modell	T_{eff}	Gitter	Rand	Zeit	Code	Startmodell	Eigenschaften
	$\log g$	km^2	Int.	KTIME	Opaz.		
ZT142g80N1	14200	138*85	k/p/2	0-16.7s	703	grau	$F_h \sim 0.0037\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -3\ 10^{-5}\%$
	8.00	6.8*3.235	zu*/zu	0-23235	zzceti1	+Störung	extrem lange Zeitskalen
ZT138g80N1	13800	138*85	k/p/2	0-15.7s	703	grau	$F_h \sim 0.085\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -0.0018\%$
	8.00	6.8*3.144	zu*/zu	0-22300	zzceti1	+Störung	
ZT134g80N1	13400	138*85	k/p/2	0-15.2s	703	grau	$F_h \sim 0.8\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -0.027\%$
	8.00	6.8*3.018	zu*/zu	0-23725	zzceti1	+Störung	
ZT130g80N1	13000	138*65	k/p/2	0-3.1s	702	Z90D2579	$F_h \sim 5.8\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -0.29\%$
	8.00	6.8*2.432	zu*/zu	0-8090	zzceti1	(12600K)	mein erster WZ, τ_{min} zu groß
ZT130g80N2	13000	138*85	k/p/2	0-15.5s	702	ZT130g80N1	$F_h \sim 6.6\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -0.45\%$
	8.00	6.8*2.872	zu*/zu	0-35675	zzceti1	az +20 P.	f-Mode klingt ab
ZT130g80N3	13000	138*85	k/p/2	0-9.61s	702	ZT130g80N2	$F_h \sim 13.7\% > F_{h,\mathrm{grey}}$
	8.00	6.8*2.872	zu*/zu	0-26350	**zzceti1**	ga	$F_{\mathrm{kin}} \sim -1.8\%$, f-M. wächst eher
ZT126g80N1	12600	138*91	k/p/2	0-14.3s	703	Z90D2579	$F_h \sim 19.1\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -2.6\%$
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-32610	zzceti1	+8+18 P.	f-Mode klingt ab
ZT126g80N2	12600	138*91	k/p/2	0-14.0s	703	Z90D2579	$F_h \sim 16.1\% < F_{h,\mathrm{zzceti1}}$,
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-31885	davmf	+8+18 P.	$F_{\mathrm{kin}} \sim -1.76\%$ f-Mode $\downarrow$
ZT126g80N3	12600	138*91	k/p/2	0-10.0s	703	ZT126g80N2	$F_h \sim 18.0\% > F_{h,\mathrm{grey}}$,
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-22225	**davmf**	ez	$F_{\mathrm{kin}} \sim -1.96\%$
ZT122g80N1	12200	138*91	k/p/2	0-14.0s	703	ZT126g80N2	$F_h \sim 33\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -7.8\%$
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-31710	davmf	dn	
ZT122g80N2	12200	138*91	k/p/2	0-10.6s	703	ZT122g80N1	$F_h \sim 31\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -5.9\%$
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-24785	**davmf**	cz	deutliche f-Mode
ZT122g77N1	12200	138*91	k/p/2	0-31.4s	703+	grau	$F_h \sim 11\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -0.75\%$
	7.70	13.6*8.136	zu*/zu	0-34885	davmf	+ Störung	f-Mode
ZT122g83N1	12200	138*91	k/p/2	0-3.57s	703+	grau	$F_h \sim 70\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -18.0\%$
	8.30	3.4*1.632	zu*/zu	0-23335	davmf	+ Störung	Jets nahe Boden, τ_{min} zu klein
ZT122g83N2	12200	138*107	k/p/2	0-8.02s	703+	ZT122g83N1	$F_h \sim 71\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -20.0\%$
	8.30	3.4*2.152	zu*/zu	0-39480	davmf	fj +20-4 P.	Umschichtung gegen Ende
ZT120g80N1	12000	138*91	k/p/2	0-15.9s	703+	ZT122g80N1	$F_h \sim 42\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -10.5\%$
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-37560	davmf	cz	
ZT120g80N2	12000	138*91	k/p/2	0-1.92s	703+	ZT120g80N1	$F_h \sim 46\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -9.6\%$
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-5530	**davmf**	dj	Abbruch wg. Absinkens
ZT120g80N3	12000	138*88	k/p/2	0-9.14s	703+	ZT120g80N2	$F_h \sim 41\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -10.1\%$
	8.00	6.8*3.358	zu*/zu	0-21820	**davmf**	bt	
ZT120g80N4	12000	138*108	k/p/2	0-15.7s	703+	ZT120g80N3	$F_h \sim 41\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -10.0\%$
	8.00	6.8*4.358	zu*/zu	0-36355	davmf	gz + 20 P.	
ZT118g80N1	11800	138*91	k/p/2	0-6.12s	703	ZT122g80N1	$F_h \sim 59\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -10.5\%$
	8.00	6.8*3.508	zu*/zu	0-18480	davmf	cz	Fluß wächst noch, Modell $\downarrow$
ZT118g80N2	11800	138*82	k/p/2	0-17.1s	703+	ZT118g80N1	$F_h \sim 53\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -12.7\%$
	8.00	6.8*3.058	zu*/zu	0-42180	davmf	b? -9 P.	Fluß sinkt wieder, Modell $\uparrow$
ZT118g80N3	11800	138*85	k/p/2	0-9.80s	703+	ZT118g80N2	$F_h \sim 56\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -14.6\%$
	8.00	6.8*3.124	zu*/zu	0-23540	**davmf**	bt +3 P.	
ZT118g80N4	11800	138*105	k/p/2	0-17.0s	703+	ZT118g80N3	$F_h \sim 60\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -15.1\%$
	8.00	6.8*4.124	zu*/zu	0-40365	davmf	gz +20 P.	
ZT118g80N5	11800	138*105	k/p/2	0-16.8s	703+	ZT118g80N4	$F_h \sim 63\%$, $F_{\mathrm{kin}} \sim -16.3\%$
	8.00	6.8*4.124	zu*/zu	0-39455	davmf	dz	Pr: 0.5 $\rightarrow$ 1

Tabelle 10: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Modellbezeichnung / Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung / Gitterpunkte und Modellmaße / Symmetrie und Interpolation sowie Randbedingungen / simulierte Zeit / Programmversion, Strahlungstransport / Startmodell / wichtige Eigenschaften. Für nähere Erläuterungen siehe Tabelle 4.

Modell	$T_{\rm eff}$ $\log g$	Gitter km^2	Rand Int.	Zeit KTIME	Code Opaz.	Startmodell	Eigenschaften
ZT116g80N1	11600 8.00	138*105 6.8*4.124	k/p/2 zu*/zu	0-12.9s 0-41455	703+ davmfa	ZT118g80N4 dz	$F_h \sim 82\%$, $F_{\rm kin} \sim -25.0\%$
ZT116g80N2	11600 8.00	138*102 6.8*3.974	k/p/2 zu*/auf	0-3.88s 0-15005	703+ davmfa	ZT116g80N1 dz -3 P.	$F_h \sim 89\%$, $F_{\rm kin} \sim -20.0\%$ Absturz wg. Störung a. Deckel
ZT116g80N3	11600 8.00	138*99 6.8*3.824	k/p/2 zu*/zu	0-16.0s 0-42590	703+ davmfa	ZT116g80N2 bh -3 P.	$F_h \sim 87\%$, $F_{\rm kin} \sim -27.0\%$ Rb. am Boden regelt falsch.
ZT116g80N4	11600 8.00	138*105 6.8*3.824	k/p/2 zu*/zu	0-13.8s 0-40325	703+ davmfa	ZT116g80N3 ba, new grid	$F_h \sim 86\%$, $F_{\rm kin} \sim -29.0\%$ Rb. am B. ohne Flußkontrolle
ZT114g80N1	11400 8.00	138*105 6.8*3.824	k/p/2 zu*/zu	0-14.0s 0-40955	703+ davmfa	ZT116g80N4 dz	$F_h \sim 98\%$, $F_{\rm kin} \sim -31.0\%$ Rb. am B. ohne Flußkontrolle
ZT114g80N2	11400 8.00	138*109 6.8*4.064	k/p/2 zu*/zu	0-13.4s 0-39960	703+ davmfa	ZT114g80N1 dz -3+6 P.	$F_h \sim 102\%$, $F_{\rm kin} \sim -31.0\%$ Rb. am B. ohne Flußkontrolle

Tabelle 11: Wichtige Daten der untersuchten Modelle: Modellbezeichnung / Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung / Gitterpunkte und Modellmaße / Symmetrie und Interpolation sowie Randbedingungen / simulierte Zeit / Programmversion, Strahlungstransport / Startmodell / wichtige Eigenschaften. Für nähere Erläuterungen siehe Tabelle 4.

3 Einfache eindimensionale Betrachtungen

3.1 Hydrostatische graue Schichtung

In diesem Abschnitt soll der Sonderfall einer planparallelen hydrostatischen grauen Strahlungsgleichgewichtsatmosphäre untersucht werden. In diesem Fall gilt $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $v = 0$ und $Q_{\mathrm{rad}} = 0$. Mit (2.13), (2.14), (2.15) und (2.16) folgt sofort $g_{\mathrm{x,shock}} = g_{\mathrm{z,shock}} = g_{\mathrm{x,turb}} = g_{\mathrm{z,turb}} = 0$. Dann reduziert sich Gl. (2.3) zu

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{3.1}$$

oder

$$\frac{d\ln P}{dz} = -\frac{\rho g}{P} \ , \tag{3.2}$$

woraus sich sofort Gl. (2.72) für die Druckskalenhöhe ergibt.

Die Forderung des Strahlungsgleichgewichts einer grauen Atmosphäre, $Q_{\mathrm{rad}} = 0$, ergibt für den Strahlungstransportteil wegen der Nichtlokalität des Strahlungsaustauschs wesentlich kompliziertere Gleichungen, die letztlich darauf hinauslaufen, daß man Lösungen für die *Schwarzschild-Milnesche-Integralgleichung* (siehe Unsöld 1968 oder Mihalas 1970) suchen muß. Man definiert die *optische Tiefe* τ über

$$\frac{d\tau}{dz} = -\kappa\rho \tag{3.3}$$

mit $\tau \to 0$ für $z \to \infty$. Mit der Näherung nach Unsöld 1968 (Gl. (40,3))

$$q_{\mathrm{grey}}(\tau) = 0.7104 - 0.1331\ \mathrm{e}^{-3.4488\tau} \tag{3.4}$$

oder der einfachen Eddington-Näherung

$$q_{\mathrm{grey,Edd}}(\tau) = \frac{2}{3} \tag{3.5}$$

für die Hopf-Funktion erhält man für die Temperatur T einer grauen Atmosphäre in Abhängigkeit von der optischen Tiefe τ die Formel (siehe Unsöld 1968, Gl. (40,9))

$$T(\tau) = T_{\mathrm{eff}} \sqrt[4]{\frac{3}{4}\left(\tau + q_{\mathrm{grey}}(\tau)\right)} \ , \tag{3.6}$$

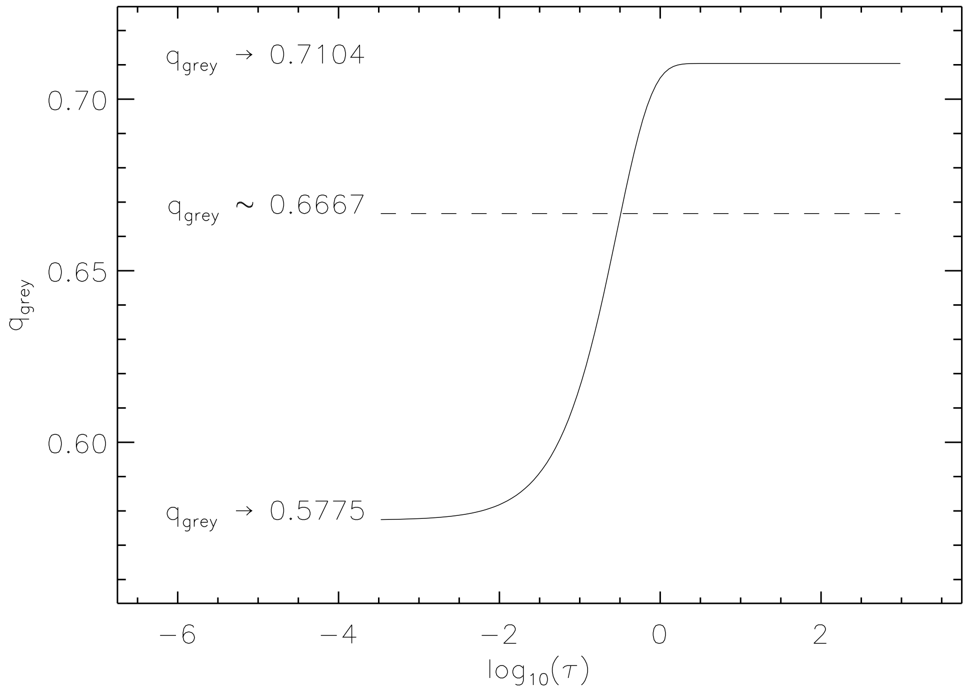
deren Verlauf in Abb. 1 dargestellt ist. Diese Formel gilt unabhängig von Zustandsgleichung oder Opazität für eine graue Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht. Es gilt $q_{\mathrm{grey}}(0) = 1/\sqrt{3}$, und so erhält man für die *Grenztemperatur* einer grauen Atmosphäre

$$T(0) = T_{\mathrm{eff}} \sqrt[4]{\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 0.811195\, T_{\mathrm{eff}} \ . \tag{3.7}$$

Gibt man einen Punkt weit im optisch dünnen vor, folgt aus Gleichung (3.7) unabhängig vom genauen Wert von τ die Temperatur. Aus einem Schätzwert für den Druck P lassen sich dann Dichte ρ und Opazität κ berechnen, und aus der Formel

$$\tau \approx \frac{3}{4}\kappa\rho H_p = \frac{3}{4}\frac{\kappa P}{g} \tag{3.8}$$

erhält man eine Näherung für die optische Tiefe. Wählt man noch einen beliebigen Startpunkt für die geometrische Tiefe z, lassen sich (3.1) und (3.3) zusammen mit (3.6) unter Zuhilfenahme der Zustandsgleichung und der Opazitätstabelle numerisch



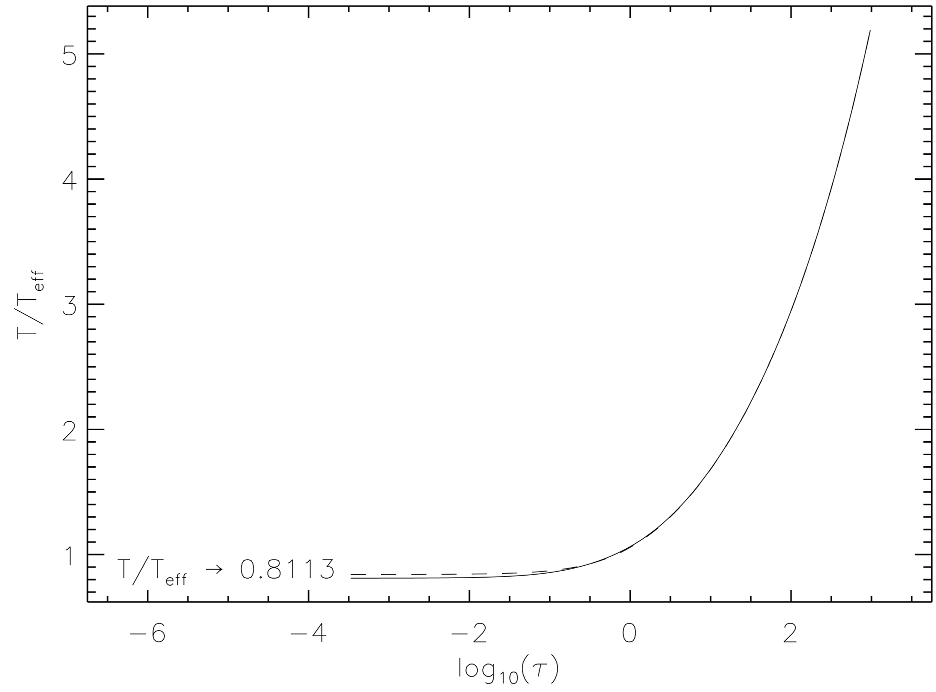


Abbildung 1: Oben ist die Funktion $q_{\rm grey}(\tau)$ aus Gl. (3.4) (durchgezogene Linie) und für die Eddington-Approximation $q_{\rm grey} = \frac{2}{3}$ dargestellt. Das untere Bild gibt das Verhältnis von Temperatur zu Effektivtemperatur für eine graue Atmosphäre (siehe Gl. (3.6)) für die beiden im Bild darüber gezeigten Näherungen an. Die Temperatur strebt für geringe optische Tiefen gegen einen Grenzwert und wächst erst für größere optische Tiefen an. Schon die einfache Eddington-Näherung ergibt eine ausgezeichnete Approximation.

integrieren. Möchte man als unabhängige Variable statt der geometrischen Höhe z die optische Tiefe τ verwenden, so kann man (3.3) und (3.1) umformen zu

$$\frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{\kappa\rho} \tag{3.9}$$

bzw.

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa} \ . \tag{3.10}$$

Dieses einfache Differentialgleichungssystem läßt sich problemlos numerisch integrieren.

Die sich ergebenden Schichtungen eignen sich zum einen als *Anfangsmodelle* für die numerischen Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen, wenn man sie noch mit kleinen zufälligen Geschwindigkeitsstörungen versieht wie z.B.

$$v(x_i, z_j) = v_0 \,\mathrm{RANDOM}(i)\, \mathrm{e}^{-\frac{(z_j - z_0)^2}{\sigma_z^2}} \ . \tag{3.11}$$

Hier ist v_0 eine feste Geschwindigkeitsamplitude, i und j der horizontale bzw. vertikale Index, RAMDOM eine Funktion, die Zufallswerte im Intervall (-1,1) erzeugt, z_0 ein Punkt innerhalb der instabilen Schicht und σ_z ein Parameter für die Breite der Glockenkurve von der Größenordnung der Druckskalenhöhe.

Zum anderen ist zumindest die in den heißeren Modellen auftretende Konvektion noch so schwach, daß die Strahlungsgleichgewichtsschichtungen nicht allzusehr verändert werden. Daher lassen sich aus diesen Schichtungen auch eine Reihe von *Abschätzungen* gewinnen.

Die Abbildungen 2 und 3 zeigen Beispiele zweier grauer Atmosphärenschichtungen für einen DA Weißen Zwerg und einen Hauptreihen-A-Stern. Sie umfassen jeweils etwa den Bereich, den auch spätere Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen abdecken.

Der augenfälligste Unterschied zwischen den beiden Sternmodellen ist wohl die unterschiedliche vertikale Ausdehnung, die aber numerisch völlig belanglos ist. Wichtiger ist hier, daß der A-Stern zwei Konvektionszonen, der Weiße Zwerg aber nur eine besitzt (gekennzeichnet durch das Gebiet, in dem $ds/dz < 0$ gilt). Die obere konvektiv instabile Schicht des A-Sterns liegt dort, wo Wasserstoff teilweise ionisiert wird und wo ein Teil des Heliums das erste Elektron verliert (die sogenannte Wasserstoffkonvektionszone). Dort wo Helium dann auch das zweite Elektron verliert, liegt die untere oder Heliumkonvektionszone. Der Weiße Zwerg mit seiner reinen Wasserstoffhülle besitzt folglich nur eine Konvektionszone.

Numerisch wichtig (und störend) ist der enorm steile Temperaturgradient des A-Sterns in der Nähe von $\tau = 1$. Um ihn aufzulösen, ist ein sehr feines Gitter und folglich ein kleiner Zeitschritt notwendig, so daß Rechenläufe, die genügend Sternzeit umfassen, sehr rechenaufwendig werden.

Beide Sterne besitzen in der Nähe von $z = 0$ eine Dichteinversion. Hier ist die Schichtung auf jeden Fall konvektiv instabil.

Dichte und Opazität des Weißen Zwerges sind um $z = 0$ jeweils um gut einen Faktor 10 höher als die Werte des A-Sterns. Die typischen Skalenhöhen sind rund um einen Faktor 1000 kleiner.

Für viele Anwendungen ist die *relative Sternmasse* $\Delta M/M_*$, die über einer Schicht mit einem bestimmten Druck P liegt, wichtig. Für den Fall, daß die betrachtete Schichtdicke klein gegen den Sternradius R_* ist (siehe Tabelle 12), kann man die Schwerebeschleunigung g als von der Höhe unabhängig annehmen, und der Druck, der auf einer

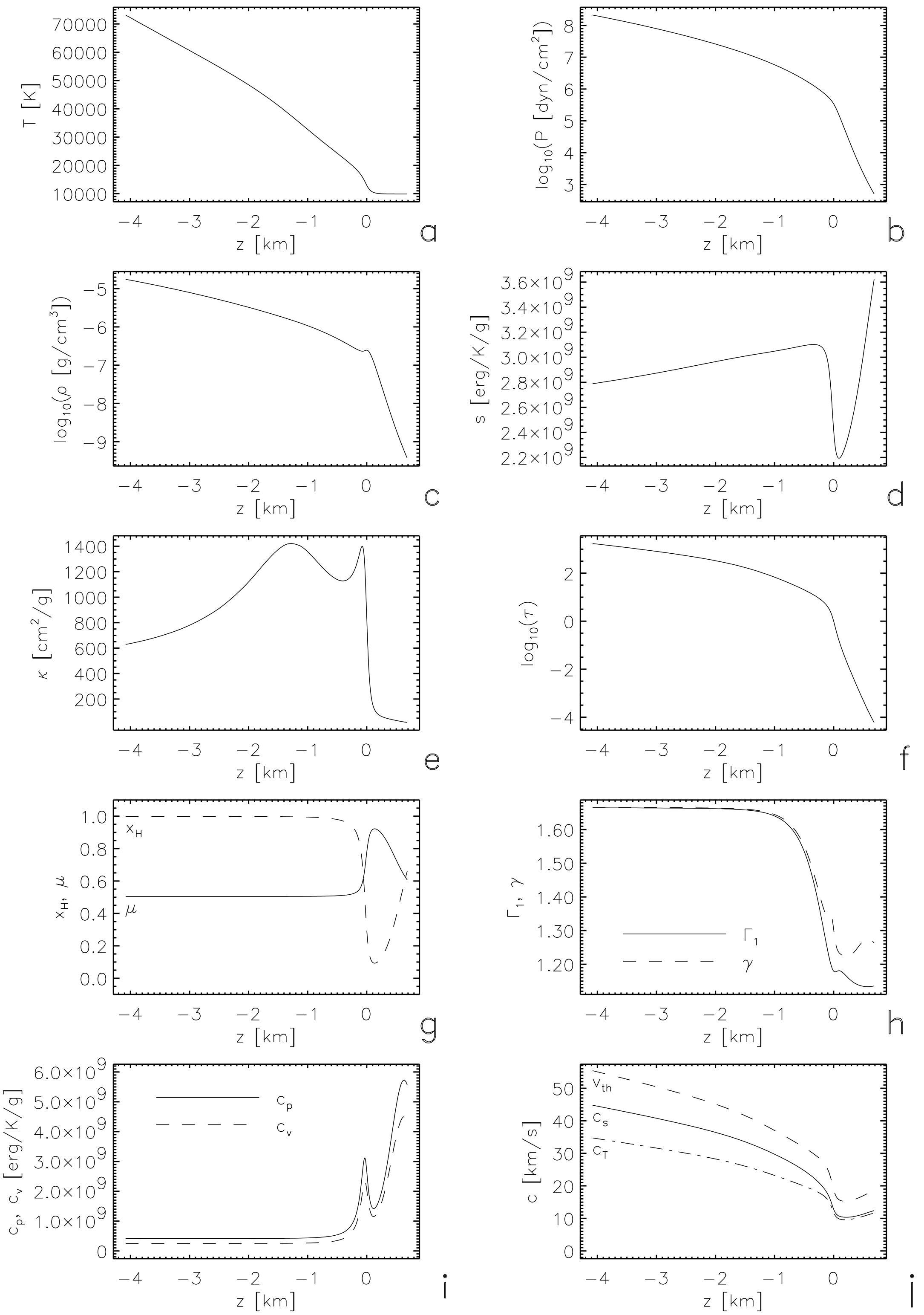


Abbildung 2: Graue Atmosphärenschichtung eines DA Weißen Zwerges mit $T_{\rm eff}$ = 12200 K und $\log g$ = 8.00. Dargestellt sind verschiedene Größen über der Höhe z: a) Temperatur T, b) Druck P, c) Dichte ρ, d) Entropie s, e) Opazität κ, f) optische Tiefe τ, g) Ionisationsgrad von Wasserstoff $x_{\rm H}$, mittleres Molekulargewicht μ, h) 1. Adiabatenkoeffizient Γ_1, Verhältnis der spezifischen Wärmen γ, i) spezifische Wärmen c_p und c_v, j) adiabatische Schallgeschwindigkeit c_s, isotherme Schallgeschwindigkeit c_T, thermische Geschwindigkeit $v_{\rm th}$.

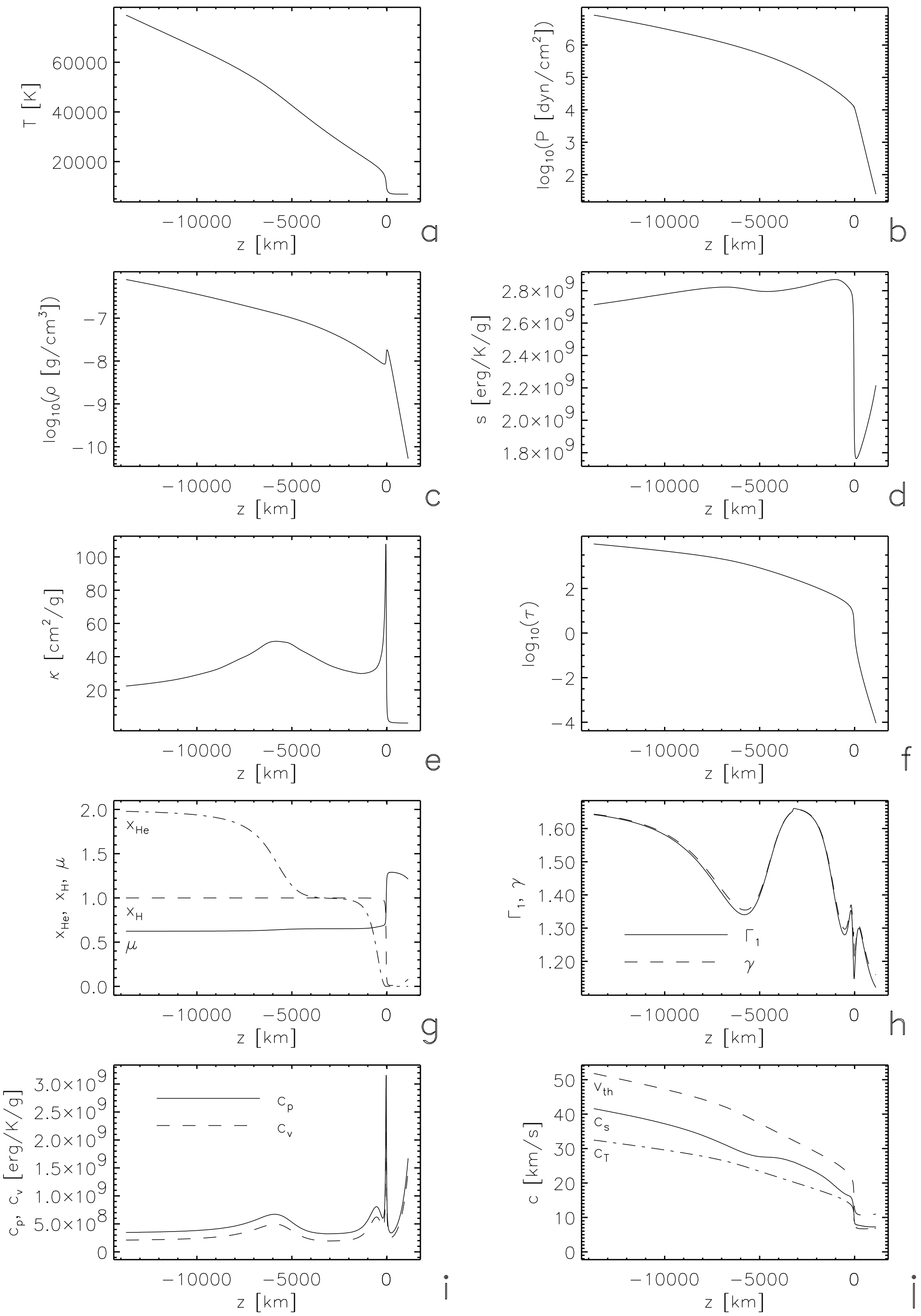


Abbildung 3: Graue Atmosphärenschichtung eines Hauptreihen-A-Sterns mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$ und $\log g = 4.40$. Dargestellt sind verschiedene Größen über der Höhe z: a) Temperatur T, b) Druck P, c) Dichte ρ, d) Entropie s, e) Opazität κ, f) optische Tiefe τ, g) Ionisationsgrad von Wasserstoff x_{H} und Helium x_{He}, mittleres Molekulargewicht μ, h) 1. Adiabatenkoeffizient Γ_1, Verhältnis der spezifischen Wärmen γ, i) spezifische Wärmen c_p und c_v, j) adiabatische Schallgeschwindigkeit c_s, isotherme Schallgeschwindigkeit c_T, thermische Geschwindigkeit v_{th}.

Schicht lastet, berechnet sich aus der auf ihr lastenden Gewichtskraft pro Fläche durch Integration von (3.1) gemäß

$$P = \frac{\Delta M g}{4\pi R_*^2} \quad . \tag{3.12}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\Delta M}{M_*} = \frac{4\pi R_*^2}{g M_*} P \quad . \tag{3.13}$$

Die Schwerebeschleunigung an der Sternoberfläche ist

$$g = G \frac{M_*}{R_*^2} \quad , \tag{3.14}$$

und man erhält für die *relative Sternmasse* $\Delta M / M_*$ über einer Schicht mit dem Druck P die einfache Formel

$$\frac{\Delta M}{M_*} = \frac{4\pi G}{g^2} P \quad . \tag{3.15}$$

Hieraus folgt sofort, daß eine Druckskalenhöhe H_p auch einer Massenskalenhöhe $H_{\Delta M}$ entspricht.

3.2 Längenskalen

In der Tabelle 12 sind einige für die Hüllen von DA Weißen Zwergen und A-Sternen bzw. für die Modelle dieser Hüllen typische Längenskalen angegeben.

Sterntyp	R_*	$z_{\mathrm{top}} - z_{\mathrm{bot}}$	H_p	Δz	l_{th}
Weißer Zwerg	10^4 km	5 km	1 km	100 m	10^{-2} cm
A-Stern	10^6 km	10000 km	1000 km	100 km	1 cm

Tabelle 12: Typische stellare Längenskalen. Für einen repräsentativen Weißen Zwerg vom Typ DA und einen Hauptreihen-A-Stern sind die Größenordnung des Sternradius R_* sowie der vertikalen Modellausdehnung $z_{\mathrm{top}} - z_{\mathrm{bot}}$, der Druckskalenhöhe H_p, der vertikalen Gitterweite Δz und der mittleren freien Weglänge l_{th} eines Teilchens angegeben. Die letzten drei Werte variieren natürlich mit der Höhe. Sie sind deshalb nur als typisch für die äußerste Hülle, die unsere Modelle umfaßt, anzusehen.

Ein Modell umfaßt also typischerweise 10 Druckskalenhöhen mit ebenfalls 10 Gitterpunkten pro Druckskalenhöhe. Die Seitenverhältnisse variieren stark, aber die Modelle sind typischerweise doppelt so breit wie hoch.

Die Modelle umfassen weniger als 1% des Sternradius, so daß Krümmungseffekte und Variationen der Schwerebeschleunigung vernachlässigt werden können.

Die *mittlere freie Weglänge* eines Teilchens zwischen zwei Stößen ist

$$l_{\mathrm{th}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_{\mathrm{atom}}^2} \frac{\mu u_{\mathrm{atom}}}{\rho} \quad , \tag{3.16}$$

wobei $\pi\sigma_{\mathrm{atom}}^2$ der Stoßquerschnitt eines Teilchens und u_{atom} die Atommassenkonstante ist. Er hängt von Teilchenart und Ionisationszustand ab, aber es gilt $\sigma_{\mathrm{atom}} \approx 2a_0 \approx 1$ Å.

Der enorme Unterschied zwischen Druckskalenhöhe H_p und mittlerer freier Weglänge l_{th} ist für die sehr hohen Reynolds-Zahlen $\text{Re} = (L_{\text{conv}}/l_{\text{th}})^{4/3}$ der Strömung verantwortlich (Gl. (2.8)).

Noch bevor man mit der numerischen Lösung der Strahlungs-Hydrodynamik-Grundgleichungen beginnt, möchte man natürlich abschätzen, auf welchen charakteristischen Skalen sich die konvektiven Phänomene abspielen werden. Man wird erwarten, daß sich die charakteristische Länge L nicht allzusehr von lokalen Längen, wie z.B. den Skalenhöhen H_p, H_ρ, H_T oder H_τ oder der Länge $1/\kappa\rho$ einer Säule mit der optischen Dicke 1 unterscheidet. Diese Größen sind in den Abbildungen 4 und 5 über der Höhe aufgetragen. In optisch dicken Gebieten ähnelt sich der Verlauf der vier Skalenhöhen, nur die Temperaturskalenhöhe ist etwa einen Faktor 4 größer als die anderen. Für $\tau \to 0$ geht die Temperatur einer grauen Schichtung gegen einen festen Grenzwert und damit die Temperaturskalenhöhe gegen unendlich. Sie besitzt um $z = 0$ ein Minimum, und beim A-Stern wird sie dort sogar kleiner als die Druckskalenhöhe. Um $z = 0$ gibt es eine Dichteinversion, d.h. die Dichteskalenhöhe besitzt zwei Singularitäten. Die Größe $1/\kappa\rho$ besitzt einen deutlich anderen Verlauf als die übrigen.

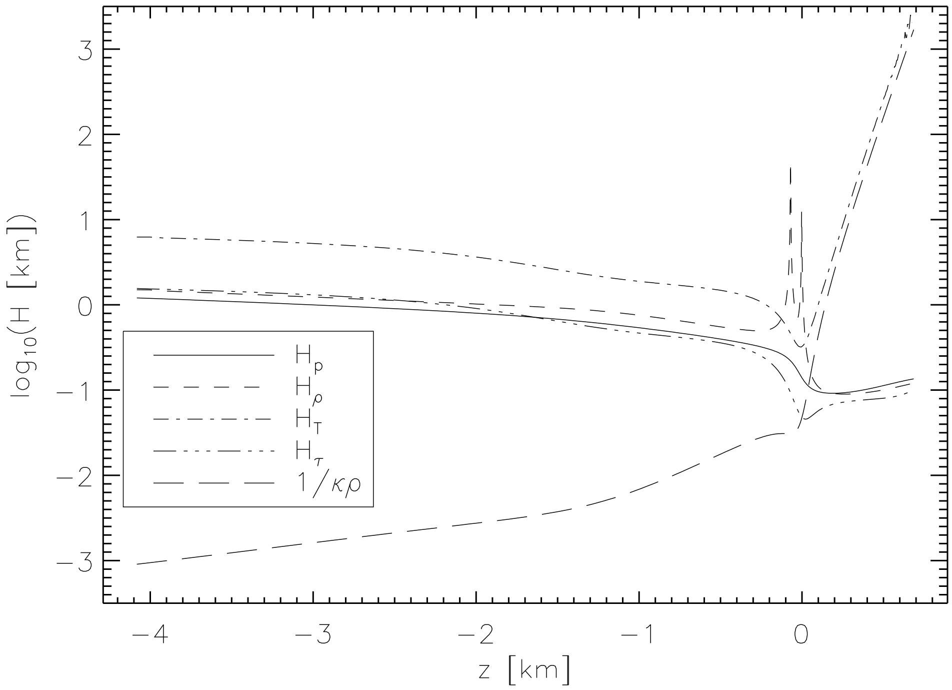


Abbildung 4: Charakteristische Skalenhöhen einer grauen Atmosphärenschichtung eines DA Weißen Zwerges mit $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$ und $\log g = 8.00$. Dargestellt sind verschiedene Größen über der Höhe z: Druckskalenhöhe H_p, Dichteskalenhöhe $|H_\rho|$, Temperaturskalenhöhe H_T, Skalenhöhe der optischen Tiefe H_τ und Länge $1/\kappa\rho$ einer Strecke mit der optischen Dicke 1.

Legait (1986) diskutiert einige mögliche Längenskalen, die in seinen Modellen von Konvektion in geschichteten Atmosphären wichtig sein können. Als charakteristische Länge wählt er die Gesamttiefe seines Modellvolumens. Meine Modelle enthalten jedoch im Gegensatz zu seinen ausgedehnte stabile Schichten als Pufferzonen, die u.a. dazu dienen sollen, die Konvektionszone gegen Einflüsse, die vom unteren oder oberen Rand ausgehen können, zu isolieren. D.h. daß die Konvektion von der vertikalen Modellausdehnung weitgehend unabhängig ist, so daß letztere keinesfalls als charakteristische

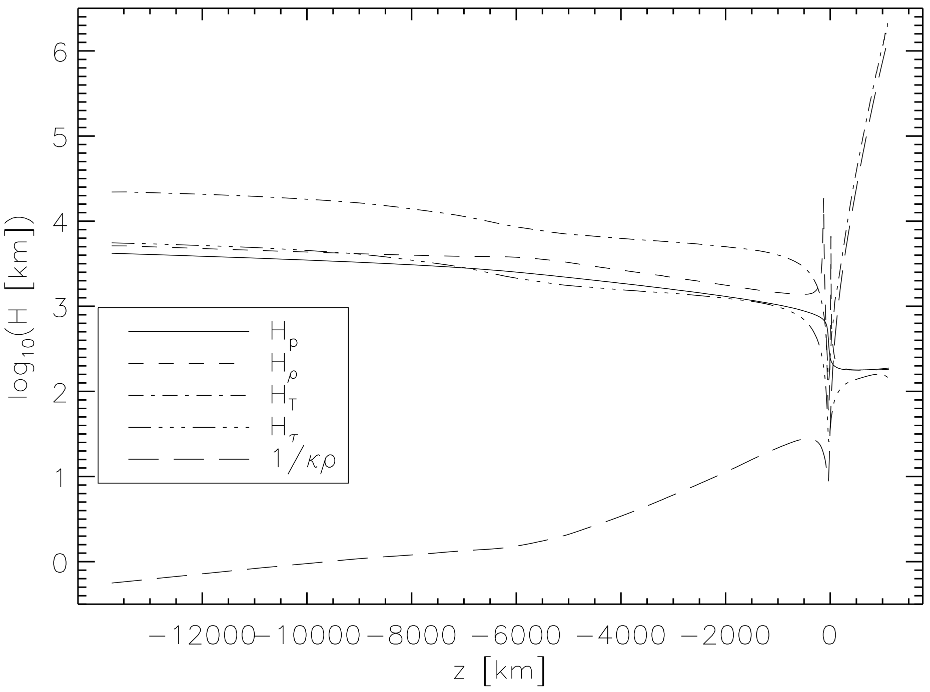


Abbildung 5: Charakteristische Skalenhöhen einer grauen Atmosphärenschichtung eines Hauptreihen-A-Sterns mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$ und $\log g = 4.40$. Dargestellt sind verschiedene Größen über der Höhe z: Druckskalenhöhe H_p, Dichteskalenhöhe $|H_\rho|$, Temperaturskalenhöhe H_T, Skalenhöhe der optischen Tiefe H_τ und Länge $1/\kappa\rho$ einer Strecke mit der optischen Dicke 1.

Größe verwendet werden kann.

Andere Längen, wie z.B. die Druckskalenhöhe variieren stark innerhalb des Modells (siehe die Abbildungen 4 und 5) und bieten sich daher auch nicht als Einheitslängen an. Die Tiefe der Konvektionszone ist a priori nicht bekannt (Sie ist jedenfalls größer als das instabile Gebiet der hydrostatischen Schichtung.) und scheidet so auch als Einheitslänge aus.

Daher werde ich Längen meist in Kilometern angeben und nur gelegentlich auf anders skalierte Einheiten zurückgreifen.

3.3 Typische Geschwindigkeiten

Charakteristische Geschwindigkeiten sind die adiabatische *Schallgeschwindigkeit* (2.73), die isotherme Schallgeschwindigkeit (2.74) und die thermische Geschwindigkeit (Unsöld 1968, S. 218)

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8}{\pi\Gamma_1}}c_s \ , \tag{3.17}$$

die alle dieselbe Größenordnung besitzen ($c_s \approx c_T \approx v_{\text{th}}$, siehe Abbildungen 2 und 3).

Eine erste Abschätzung für die Größe der zu erwartenden *konvektiven Geschwindigkeiten* (Abbildungen 6 und 7) läßt sich mit Hilfe der Formel (5.8) gewinnen, wenn man annimmt, daß die Konvektion den gesamten Energiefluß tragen muß ($F_{\text{con}} = \sigma T_{\text{eff}}^4$) und daß die Temperaturfluktuationen in der Größenordnung der Temperatur selber liegen ($\Delta T = T$). Beides sind nur Obergrenzen und die sich ergebenden Geschwindigkeiten sind dementsprechend unsicher. Bessere Abschätzungen lassen sich nur mit Hilfe einer komplizierteren Theorie (siehe Kapitel 5) gewinnen.

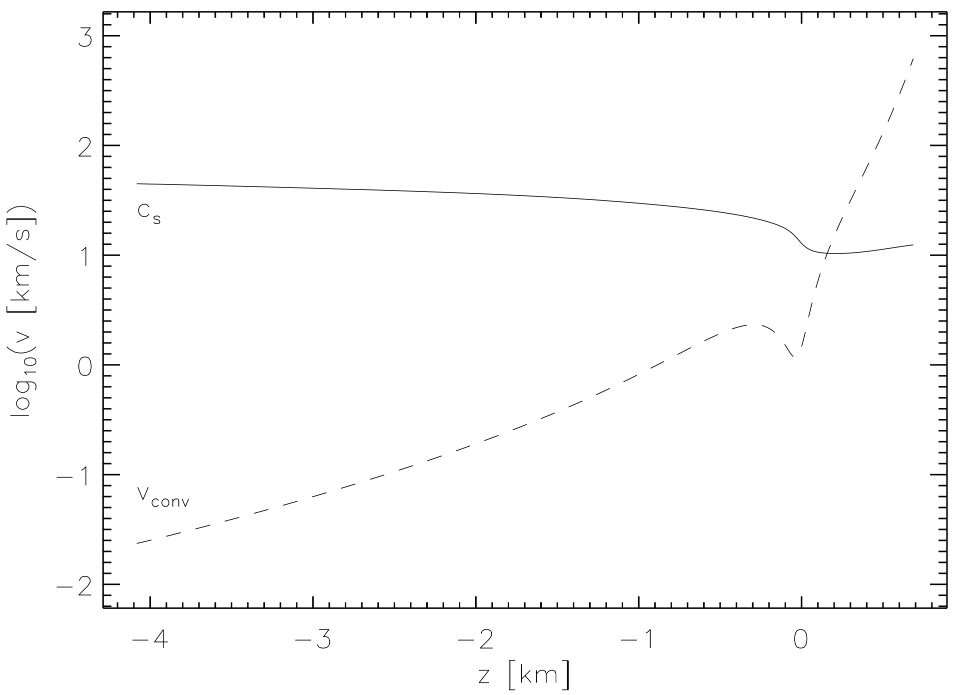


Abbildung 6: Abschätzung der Größenordnung der Konvektionsgeschwindigkeit eines DA Weißen Zwerges mit $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ und $\log g = 8.00$. Über der Höhe z wurde die adiabatische Schallgeschwindigkeit c_s und die Größe $v_{\rm conv} = (\sigma T_{\rm eff}^4)/(c_p \rho T)$ als erste Abschätzung für die konvektiven Geschwindigkeiten aufgetragen.

In der Wasserstoffkonvektionszone liegen die so abgeschätzten Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit. In tieferen Schichten reichen schon wesentlich kleinere Geschwindigkeiten (bzw. kleinere Temperaturfluktuationen), um den gesamten Fluß zu transportieren. In der Photosphäre reichen selbst Überschallgeschwindigkeiten nicht dazu aus. Hier wird die Konvektion also keinen nennenswerten Fluß mehr transportieren können.

Typische mittlere konvektive Geschwindigkeiten, die sich aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen ergeben, erreichen zwar einen gewissen Bruchteil der Schallgeschwindigkeit, überschreiten sie aber nicht. Im Gegensatz dazu liegt die Vertikalgeschwindigkeit in einem Abströmkanal oft im Überschallbereich. Auch die Horizontalgeschwindigkeit in der Photosphäre überschreitet vielfach die Schallgrenze.

Mit einem einfachen Argument kann man das Verhältnis von typischer Horizontalgeschwindigkeit u zu Vertikalgeschwindigkeit v in einer Zelle der Größe $x \times z$ abschätzen (Ludwig et al. 1989). Nimmt man in der Kontinuitätsgleichung (2.1) die Dichte als zeit- und ortsunabhängig an, so schreibt sie sich als

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \approx \frac{u}{x} + \frac{v}{z} \ , \tag{3.18}$$

und es ergibt sich

$$\frac{u}{v} \approx \frac{x}{z} \ . \tag{3.19}$$

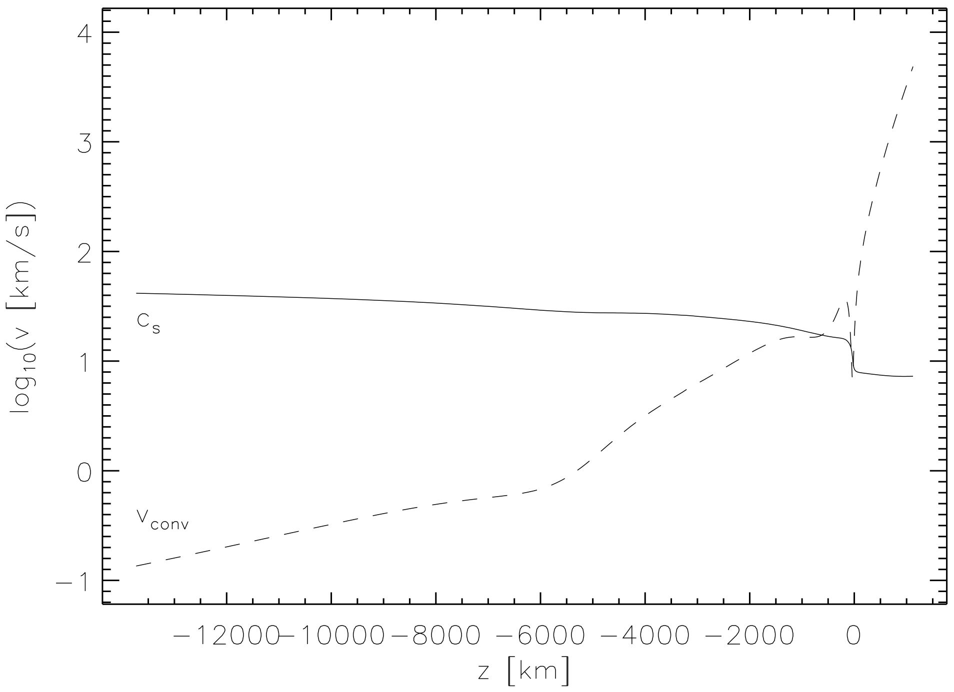


Abbildung 7: Abschätzung der Größenordnung der Konvektionsgeschwindigkeit eines Hauptreihen-A-Sterns mit $T_{\rm eff} = 8500\,$K und $\log g = 4.40$. Über der Höhe z wurde die adiabatische Schallgeschwindigkeit c_s und die Größe $v_{\rm conv} = (\sigma T_{\rm eff}^4)/(c_p \rho T)$ als erste Abschätzung für die konvektiven Geschwindigkeiten aufgetragen. Diese Geschwindigkeit erhält man, wenn man die Boltzmann-Zahl Bo gleich eins setzt und Gleichung (3.58) nach v auflöst.

Nordlund (1985) kommt auf eine ähnliche Formel der Gestalt

$$\frac{u}{v} \approx 1/kH_{\rho v} \quad , \tag{3.20}$$

wobei k der horizontale Wellenvektor und $H_{\rho v}$ die Skalenhöhe des vertikalen Massenflusses ist.

Die *Lichtgeschwindigkeit* c ist um so viel höher als die anderen vorkommenden Geschwindigkeiten, daß die Lichtausbreitung als instantan angesehen werden kann.

3.4 Zeitskalen

Man definiert normalerweise typische Zeitskalen über die Zeit, die vergeht, bis eine Störung der Größe L abgeklungen ist oder bis ein Teilchen oder eine Welle diese Länge zurückgelegt hat. Für die folgenden Abschätzungen werde ich mich dabei an der Druckskalenhöhe H_p orientieren.

Als *Schallaufzeit* bezeichnet man die Zeitspanne, die der Schall benötigt, um eine Druckskalenhöhe zweimal zu durchqueren

$$t_{\rm ac} = \frac{L}{c_s} \approx \frac{2H_p}{c_s} = \frac{1}{\omega_{\rm ac}} \quad . \tag{3.21}$$

Die *Courant-Zeit* ist die Schallaufzeit durch eine Gitterzelle

$$t_{\rm Courant} = \frac{\min\,(\Delta x, \Delta z)}{c_s} \quad . \tag{3.22}$$

Breitet sich die Schallwelle in einem sich gegenüber dem Gitter bewegenden Medium aus, muß diese Strömungsgeschwindigkeit mitberücksichtigt werden,

$$t_{\text{Courant}} = \min\left(\frac{\Delta x}{|u| + c_s} + \frac{\Delta z}{|v| + c_s}\right) \quad . \tag{3.23}$$

Entsprechend ergibt sich eine typische *Strömungszeitskala*

$$t_{\text{flow}} = \frac{2H_p}{v} \quad , \tag{3.24}$$

wobei v jetzt die Strömungsgeschwindigkeit sein soll. Im allgemeinen unterscheidet sich hiervon die *Strömungsänderungszeitskala*, die sich wohl am besten über eine zeitliche Korrelationsfunktion definieren ließe, die ich jetzt aber symbolisch definiere als

$$t_{\text{flow,change}} \approx „\frac{dt}{d\ln v}“ \quad . \tag{3.25}$$

Für stationäre Modelle wäre diese Zeitskala dann unendlich. Die *Turnover-Zeitskala* oder *Umwälzzeitskala* ist noch schwerer genau zu definieren. Die konvektiven Geschwindigkeiten nehmen nämlich mit zunehmender Entfernung von der instabilen Zone nur allmählich ab. Diese weiter entfernten Gebiete werden dann auch entsprechend langsam umgewälzt. Eine typische Turnover-Zeit könnte man aus der Halbwertsbreite σ_v des vertikalen konvektiven Strömungsprofils und dem Maximum v_{max} dieses Profils gewinnen

$$t_{\text{turnover}} = \frac{2\sigma_v}{v_{\text{max}}/2} \approx \frac{10H_p}{v} \quad . \tag{3.26}$$

Die *Freifallzeit* gibt an, wie lange ein Teilchen im Schwerefeld braucht, um aus der Ruhelage heraus die Strecke L frei zu fallen

$$t_{\text{freefall}} = \sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{\frac{2H_p}{g}} \quad . \tag{3.27}$$

Für Strömungen hat jedoch die verwandte *Brunt-Väisälä-Zeitskala*

$$t_{\text{BV}} = \frac{1}{\omega_{\text{BV}}} = \sqrt{g\left(\frac{1}{H_\rho} - \frac{1}{\Gamma_1 H_p}\right)}^{-1} \tag{3.28}$$

mehr Bedeutung, die angibt, auf welcher Zeitskala konvektive Störungen wachsen, bzw. welche Periode Schwerewellen mindestens besitzen.

Die *thermische* oder *Kelvin-Zeitskala* ist ein grobes Maß für die Zeit, die ein Modell braucht, um sich auf Störungen wie z.B. Veränderungen in den Modellparametern einzustellen. Sie ergibt sich aus der Gesamtenergie der Materie über einer Schicht der Höhe z, geteilt durch den gesamten Fluß

$$t_{\text{Kelvin}}(z) = \frac{\int_z^{z_{\text{top}}} \int_{x_{\text{left}}}^{x_{\text{right}}} \rho e_{\text{tot}} dx dz}{(x_{\text{right}} - x_{\text{left}})\,\sigma T_{\text{eff}}^4} \quad . \tag{3.29}$$

Die *Strahlungsrelaxationszeit* für kleine Temperaturfluktuationen in einer unendlich ausgedehnten homogenen grauen Atmosphäre für Störungen von beliebiger optischer Dicke ist nach Spiegel (1957)

$$t_{\text{rad}} = \frac{c_v}{16\kappa\sigma T^3}\left(1 - \frac{\kappa\rho}{k}\cot^{-1}\frac{\kappa\rho}{k}\right)^{-1} \quad , \tag{3.30}$$

wobei $k = 2\pi/$Wellenlänge der Wellenvektor der Störung und $\cot^{-1}$ der Arkus-Kotangens ($\cot^{-1}(\cdot) = \pi/2 - \tan^{-1}(\cdot)$) ist. Unno und Spiegel (1966) vergleichen dieses Ergebnis mit dem, das unter der Verwendung der Eddington-Näherung resultiert

$$t_{\mathrm{rad,Edd}} = \frac{c_v}{16\kappa\sigma T^3}\left(1 + 3\left(\frac{\kappa\rho}{k}\right)^2\right) \quad . \tag{3.31}$$

Die Autoren verwenden jedoch c_p anstelle von c_v, um zu berücksichtigen, daß Druckunterschiede schnell ausgeglichen werden (siehe Landau & Lifschitz 1991, S. 247 und 248, Gl. (50,1)). Für die optisch dünnen und dicken Grenzfälle besitzen Gl. (3.30) und (3.31) die gleichen Grenzwerte. Im *optisch dicken* Fall gilt $\frac{\kappa\rho}{k} \gg 1$ und

$$t_{\mathrm{rad,thick}} = \frac{c_v}{16\kappa\sigma T^3}\, 3\left(\frac{\kappa\rho}{k}\right)^2 = \frac{1}{\chi_{\mathrm{rad}} k^2} \quad . \tag{3.32}$$

Im *optisch dünnen* Fall gilt $\frac{\kappa\rho}{k} \ll 1$ und

$$t_{\mathrm{rad,thin}} = \frac{c_v}{16\kappa\sigma T^3} \quad . \tag{3.33}$$

Diese vier Funktionen werden in Abbildung 8 verglichen.

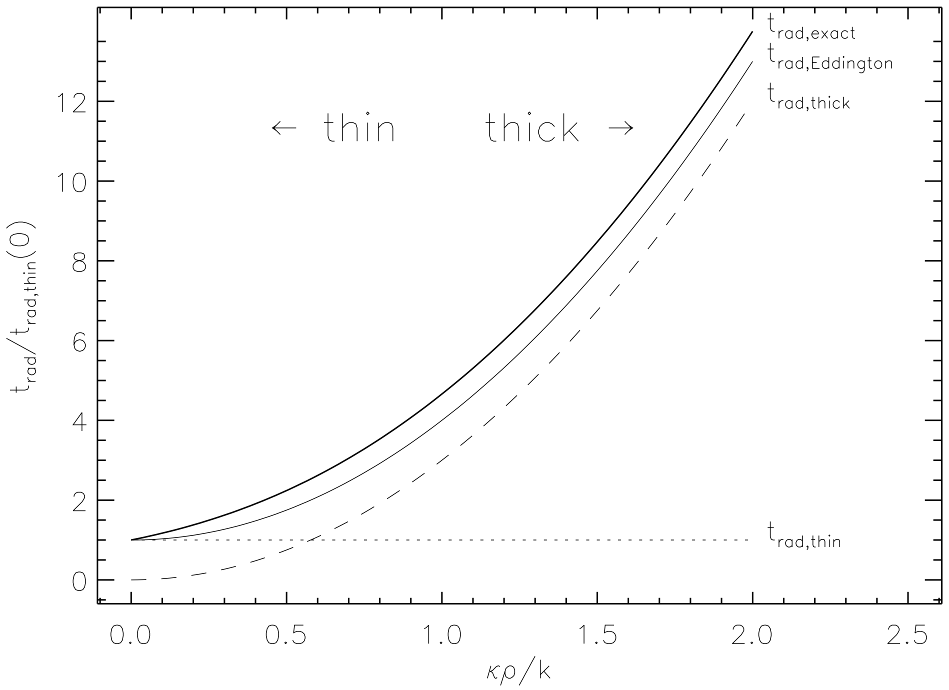


Abbildung 8: Strahlungsrelaxationszeiten für verschiedene Näherungen im Verhältnis zur (konstanten) Relaxationszeit im optisch dünnen Grenzfall als Funktion der optischen Dicke der Störung $\frac{\kappa\rho}{k}$: Exakte Formel (3.30), Eddington-Näherung (3.31), optisch dicker Fall (3.32), optisch dünner Fall (3.33). Für optisch dünne Störungen strebt die Abklingzeit gegen einen konstanten Grenzwert und nicht gegen 0, wie es die optisch dicke Näherung für diesen Fall voraussagt. Für optisch dicke Störungen wachsen die Abklingzeiten quadratisch mit der Ausdehnung der Störung, d.h. der Strahlungsaustausch läßt sich als Diffusionsprozeß betrachten.

Aus der mittleren freien Weglänge und der thermischen Geschwindigkeit läßt sich die molekulare Viskosität

$$\nu_{\rm th} = \frac{1}{3} l_{\rm th} v_{\rm th} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2_{\rm atom}} \frac{\mu u_{\rm atom}}{\rho} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \tag{3.34}$$

berechnen. Dann kann man die *viskose Zeitskala*, auf der Geschwindigkeitsfelder der Größenskala L abklingen, abschätzen zu

$$t_{\rm vis} = \frac{L^2}{\nu} = 3 \frac{L^2}{l^2_{\rm th}}\, t_{\rm th} \ . \tag{3.35}$$

Aus der kinetischen Gastheorie ergibt sich für die *mittlere Zeit zwischen zwei Teilchenstößen* (Mihalas & Mihalas, Gl. (29.9))

$$t_{\rm th} = \frac{l_{\rm th}}{v_{\rm th}} = \sqrt{\frac{\mu}{16\pi RT}} \frac{\mu u_{\rm atom}}{\sigma^2\rho} \ . \tag{3.36}$$

Die turbulente Viskosität ist keine Materialgröße, sondern ergibt sich erst während einer Simulation aus dem sich einstellenden Geschwindigkeitsfeld und seinen räumlichen Ableitungen. Um aber eine erste Abschätzung durchführen zu können, kann man in Gleichung (2.12) $\partial u = \partial v = c_s$, $\partial x = \partial z = H_p$, $\Delta x = \Delta z = H_p/10$ und $C = 0.5$ setzen. Dann erhält man für die turbulente viskose Zeitskala

$$t_{\rm turb} = \frac{L^2}{\nu_{\rm turb}} \approx \frac{H_p^2}{\eta_{\rm turb}/\rho} \approx \frac{H_p^2}{0.5^2\,(\Delta x \Delta z)\,\sqrt{8} c_s/H_p} \tag{3.37}$$

$$\approx \frac{H_p^2}{0.5^2\,(H_p/10)^2\,\sqrt{8} c_s/H_p} = \frac{200}{\sqrt{2}} \frac{H_p}{c_s} = \frac{100}{\sqrt{2}} t_{\rm ac} \approx 70 t_{\rm ac} \ . \tag{3.38}$$

Für einen typischen Weißen Zwerg und einen A-Stern sind einige charakteristische Zeitskalen in den Abbildungen 9 bzw. 10 dargestellt.

3.5 Charakteristische dimensionslose Größen

Zur Analyse einfacher Experimente – wie dem Umschlagen einer Rohrströmung vom laminaren in das turbulente Regime – werden gerne dimensionslose Größen eingeführt. Bei der Rohrströmung übernimmt die Reynolds-Zahl die Rolle eines Ähnlichkeitsparameters. Ein gegebenes Experiment muß dann nicht durch die drei Größen Strömungsgeschwindigkeit, Rohrdurchmesser und Viskosität beschrieben werden sondern nur noch durch eine Kombination dieser drei (Gleichung (3.48)). Experimente mit gleicher Reynolds-Zahl verhalten sich ähnlich, und der zu untersuchende Parameterraum wird von drei Dimensionen auf eine reduziert.

Bei Konvektionsexperimenten (z.B. zur Untersuchung der Bénard-Instabilität) sind zwei Ähnlichkeitsparameter (z.B. die Reynolds- und die Rayleigh-Zahl) notwendig.

Diese Art der Aufstellung von Ähnlichkeitsgesetzen steht und fällt jedoch mit der Forderung nach konstanten Materialgrößen. In stellaren Konvektionszonen gibt es enorme Druck-, Temperatur- und Dichtevariationen, die zu entsprechenden Schwankungen in der Opazität κ oder der Wärmekapazität c_p führen (s. Abb. 2 und 3). Diese Materialgrößen lassen sich somit nicht mehr einfach aus einer Ableitung herausziehen, sondern es treten Skalenhöhen dieser Größen als neue Längenskalen auf. Stellare Konvektionszonen lassen sich also nicht in ein zweidimensionales Schema aus Reynolds- und Rayleigh-Zahl eingliedern. Deshalb bleibe ich bei den klassischen Parametern zur Beschreibung der Hülle eines Sterns: Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$, Logarithmus der Schwerebeschleunigung $\log g$ und chemische Zusammensetzung $abuX$, $abuY$ und $abuZ$.

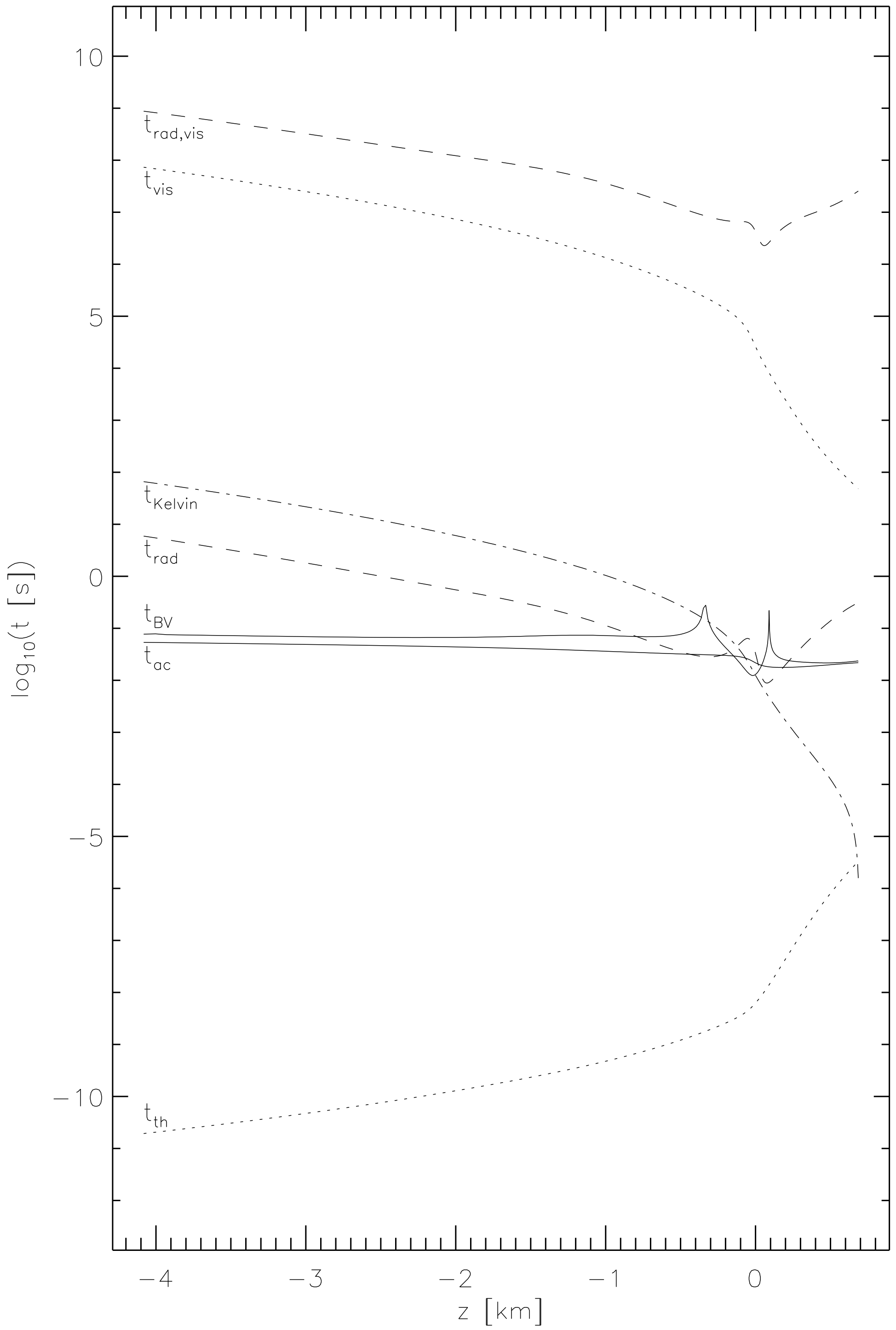


Abbildung 9: Typische Zeitskalen eines DA Weißen Zwerges mit $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$ und $\log g = 8.00$. Über der Höhe z wurden die molekulare viskose Zeitskala t_{vis}, die radiative viskose Zeitskala $t_{\text{rad,vis}}$, die lokale Kelvin-Zeitskala t_{Kelvin}, die Strahlungsrelaxationszeit t_{rad}, die Brunt-Väisälä-Zeitskala t_{BV}, die lokale Schallaufzeit t_{ac} und die mittlere Zeit zwischen zwei Teilchenstößen t_{th}, aufgetragen. Als charakteristische Länge wurde die lokale Druckskalenhöhe verwendet.
Die Brunt-Väisälä-Frequenz ω_{BV} wird zwischen $z = 0.1\,\text{km}$ und $z = -0.3\,\text{km}$ imaginär. An den Grenzen dieses Bereichs verschwindet sie. Deshalb hat ihr Kehrwert t_{BV} hier Singularitäten.

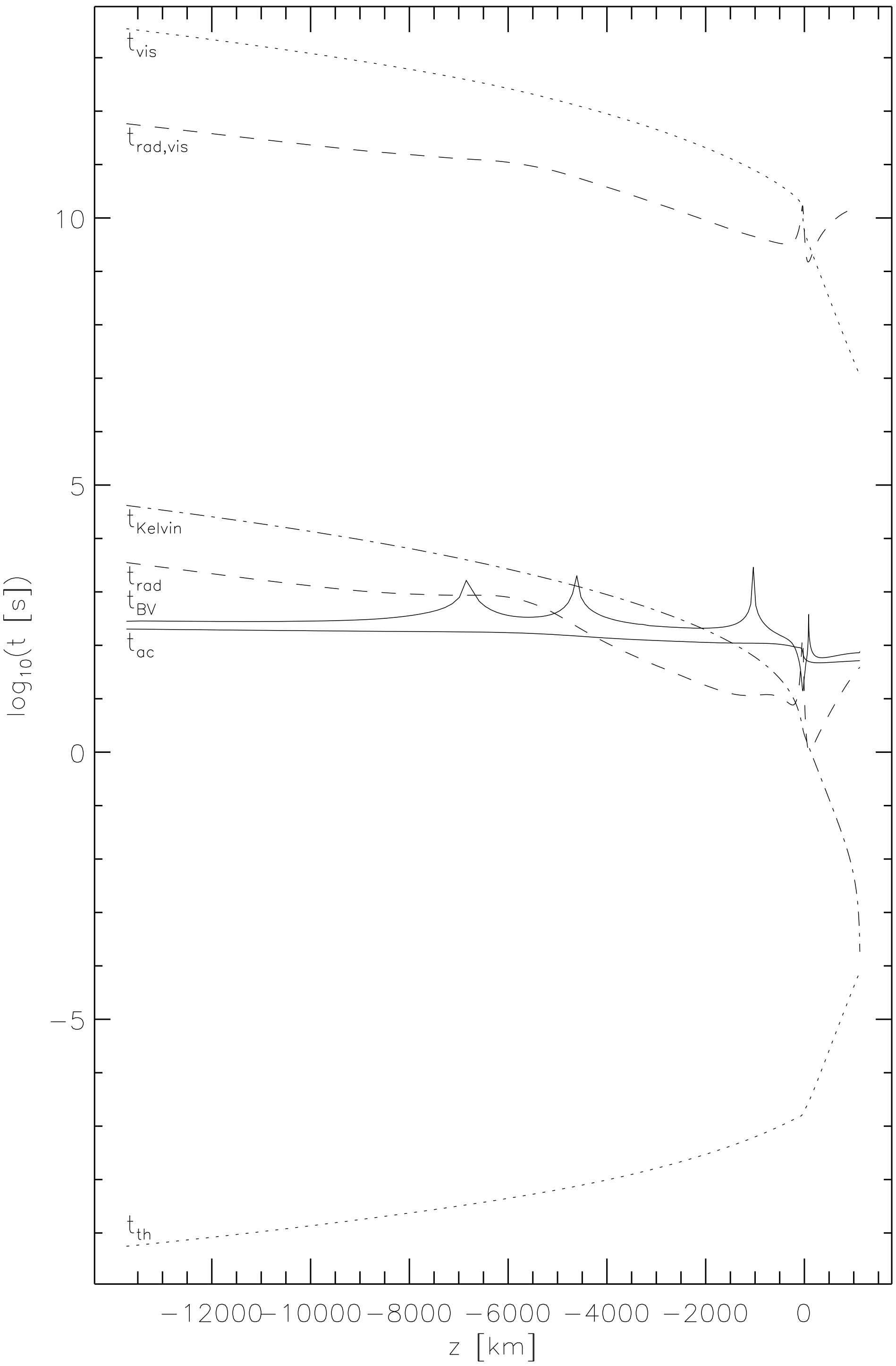


Abbildung 10: Typische Zeitskalen eines Hauptreihen-A-Sterns mit $T_{\mathrm{eff}} = 8500\,\mathrm{K}$ und $\log g = 4.40$. Über der Höhe z wurden die molekulare viskose Zeitskala t_{vis}, die radiative viskose Zeitskala $t_{\mathrm{rad,vis}}$, die lokale Kelvin-Zeitskala t_{Kelvin}, die Strahlungsrelaxationszeit t_{rad}, die Brunt-Väisälä-Zeitskala t_{BV}, die lokale Schallaufzeit t_{ac} und die mittlere Zeit zwischen zwei Teilchenstößen t_{th}, aufgetragen. Als charakteristische Länge wurde die lokale Druckskalenhöhe verwendet.
Die Brunt-Väisälä-Frequenz ω_{BV} wird zwischen $z = 100\,\mathrm{km}$ und $z = -1000\,\mathrm{km}$ sowie zwischen $z = -4700\,\mathrm{km}$ und $z = -6900\,\mathrm{km}$ imaginär. An den Grenzen dieser Bereiche verschwindet sie. Deshalb hat ihr Kehrwert t_{BV} hier Singularitäten.

Die dimensionslosen Größen lassen sich in stellaren Konvektionszonen nicht mehr als Ähnlichkeitsparameter gebrauchen. Nichtsdestoweniger bleiben sie zur groben Charakterisierung der konvektiven Strömungen und zur Untersuchung der relativen Wichtigkeit verschiedener konkurrierender Prozesse nützlich.

Die *Mach-Zahl* gibt das Verhältnis von Strömungs- zu Schallgeschwindigkeit an

$$\mathrm{Ma} = \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{Schallgeschwindigkeit}} = \frac{t_{\text{sound}}}{t_{\text{flow}}} = \frac{v}{c_s} \ . \tag{3.39}$$

Sie ist wichtig für die Größe von Druckstörungen und den Grad der Nichtlinearität. Die *Strouhal-Zahl* (Landau & Lifschitz 1991, Gl. (19,6))

$$\mathrm{St} = \frac{\text{Strömungsänderungszeitskala}}{\text{Strömungszeitskala}} \tag{3.40}$$

ist für stationäre Strömungen ∞, in unseren Rechnungen aber nur wenig größer als 1. Die *Prandtl-Zahl*

$$\mathrm{Pr} = \frac{\text{Viskosität}}{\text{Diffusivität}} = \frac{t_{\text{diff}}}{t_{\text{vis}}} = \frac{\nu}{\chi} \tag{3.41}$$

vergleicht den Einfluß von Viskosität (bremsende Terme in der Impulsgleichung) zur Diffusivität (Temperatur- bzw. Entropiefluktuationen ausgleichende Terme in der Energiegleichung). Diese Effekte können durch verschiedene Prozesse verursacht werden: durch Teilchenaustausch auf molekularer Ebene (thermische Bewegung), durch Strahlungsaustausch und in unserem Turbulenzmodell durch den Austausch von Turbulenzelementen. Die molekulare Prandtl-Zahl $\mathrm{Pr}_{\mathrm{th}}$ läßt sich für ein Modellgas aus festen Kugeln abschätzen zu (Mihalas & Mihalas 1984, Gl. (29.26))

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{th}} \approx \frac{2}{5}\gamma \ , \tag{3.42}$$

ist also für Gase immer von der Größenordnung 1 (Landau & Lifschitz 1991, S. 263). Damit ergibt sich für die molekular Temperaturleitfähigkeit

$$\chi_{\mathrm{th}} = \mathrm{Pr}_{\mathrm{th}} \nu_{\mathrm{th}} \ . \tag{3.43}$$

Analog dazu wird in unserem Turbulenzmodell für die turbulente Prandtl-Zahl $\mathrm{Pr}_{\mathrm{turb}}$ auch die typische Größe 1 gewählt. Zur Bestimmung der radiativen Prandtl-Zahl definiert man die *radiative Leitfähigkeit*

$$K_{\mathrm{rad}} = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \tag{3.44}$$

und die *radiative Diffusivität*

$$\chi_{\mathrm{rad}} = \frac{K_{\mathrm{rad}}}{c_p\rho} = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho^2 c_p} \ . \tag{3.45}$$

Nach Mihalas & Mihalas 1984 (Gl. 97.40) ist dann die *radiative Viskosität*

$$\nu_{\mathrm{rad}} = \frac{T}{5c^2\rho} K_{\mathrm{rad}} = \frac{T}{5c^2\rho}\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \ . \tag{3.46}$$

Damit ergibt sich für die *radiative Prandtl-Zahl*

$$\mathrm{Pr}_{\mathrm{rad}} = \frac{\nu_{\mathrm{rad}}}{\chi_{\mathrm{rad}}} = \frac{T c_p}{5c^2} \approx \frac{c_s^2}{c^2} \ . \tag{3.47}$$

Die *Reynolds-Zahl*

$$\mathrm{Re} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}} = \frac{\rho v^2}{\rho \nu v / L} = \frac{t_{\mathrm{vis}}}{t_{\mathrm{flow}}} = \frac{Lv}{\nu} \tag{3.48}$$

sagt etwas über den zu erwartenden Turbulenzgrad der Strömung aus: Unterhalb einer kritischen Reynolds-Zahl, die von Problem zu Problem und von Geometrie zu Geometrie unterschiedlich ist, bleibt die Strömung laminar. Oberhalb dieses kritischen Wertes wird sie turbulent. Auch von der Reynolds-Zahl gibt es verschiedene Versionen, je nachdem ob man die molekulare, turbulente oder radiative Viskosität betrachtet.

Aus der Abschätzung (3.38) ergibt sich eine Reynolds-Zahl in den Simulationen von

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{turb}} \approx \frac{t_{\mathrm{turb}}}{t_{\mathrm{flow}}} \approx \frac{t_{\mathrm{turb}}}{t_{\mathrm{ac}}} \approx 70 \ . \tag{3.49}$$

Sie liegt demnach deutlich unter der wirklichen Reynolds-Zahl des Problems.

Die *Péclet-Zahl* ist einfach

$$\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} = \frac{\text{Diffusive Zeitskala}}{\text{Strömungszeitskala}} = \frac{t_{\mathrm{diff}}}{t_{\mathrm{flow}}} = \frac{Lv}{\chi} \ . \tag{3.50}$$

Die *Froude-Zahl*

$$\mathrm{Fr} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Schwerebeschleunigung}} = \frac{t_{\mathrm{g}}}{t_{\mathrm{flow}}} = \frac{v/g}{L/v} = \frac{v^2}{gL} \approx \frac{\mathrm{Ma}^2 c_s^2}{gH_p} = \mathrm{Ma}^2\Gamma_1 \tag{3.51}$$

hängt im wesentlichen von der Mach-Zahl der Strömung ab. Die Rayleigh-Zahl

$$\mathrm{Ra} = \frac{t_{\mathrm{rad}} t_{\mathrm{vis}}}{t_{\mathrm{BV}}^2} \tag{3.52}$$

mißt das Verhältnis zwischen beschleunigender Wirkung der Auftriebskräfte zur bremsenden Wirkung von Strahlung und Viskosität. Die Rolle dieser Zahl wird in Abschnitt 3.7 genauer untersucht.

Die *Graßhof-Zahl* (Landau & Lifschitz 1991, S. 276)

$$\mathrm{Gr} = \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}} = \frac{t_{\mathrm{vis}}^2}{t_{\mathrm{BV}}^2} \tag{3.53}$$

ist ein Indikator für den Einfluß der Viskosität auf das Wachstum von konvektiven Störungen.

Die *Richardson-Zahl* (Kippenhahn & Weigert 1991, Gl. (43.11))

$$\mathrm{Ri} = \frac{g\delta\,|\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla|}{H_p (dv/dz)^2} = \frac{1/(dv/dz)^2}{t_{\mathrm{BV}}^2} \tag{3.54}$$

sagt aus, ob eine Scheerströmung trotz des stabilisierenden Einflusses der Auftriebskräfte turbulent werden kann.

Die *Nusselt-Zahl* dient normalerweise zur Charakterisierung der Effektivität des Wärmeübergangs zwischen einem festen Körper (am Boden oder Deckel des Flüssigkeitsbehälters) und der Flüssigkeit selbst (Landau & Lifschitz 1991, Gl. (53,7))

$$\mathrm{Nu} = \frac{\frac{dT}{dz}}{\frac{(T_1 - T_0)}{L}} \ , \tag{3.55}$$

wobei $\frac{dT}{dz}$ der Temperaturgradient in der Übergangszone, $T_1 - T_0$ eine charakteristische Temperaturdifferenz zwischen dem festen Körper und der Flüssigkeit und L ein charakteristischer Längenparameter ist. Legait (1986) benutzt die Nusselt-Zahl als Maß für die Dicke der thermischen Grenzschicht. Massaguer & Zahn (1980) verwenden die Definition

$$\mathrm{Nu} = \frac{F_{\mathrm{tot}} - F_{\mathrm{ad}}}{F_{\mathrm{linear}} - F_{\mathrm{ad}}} \ , \tag{3.56}$$

um zu messen, wie nahe das Temperaturprofil dem adiabatischen kommt. Hier ist F_{tot} der gesamte Fluß, F_{ad} der radiative Fluß einer adiabatischen Schichtung und F_{linear} der radiative Fluß, der transportiert würde, wenn das Temperaturprofil zwischen Boden und Deckel linear wäre. Auf diese Weise erhält man eine für ein Modell charakteristische globale Nusselt-Zahl. Sie ist aber überhaupt nur sinnvoll, wenn die Materialkonstanten wie z.B. radiative Leitfähigkeit oder Viskosität im Modell konstant sind. Das ist in den Rechnungen von Legait (1986) oder Massaguer & Zahn (1980) der Fall, nicht aber in realistischen Modellen stellarer Konvektionszonen. Man kann stattdessen auf eine lokale Größe zurückgreifen, die auch in der Mischungswegtheorie benutzt wird

$$\mathrm{Nu} = \frac{\nabla_{\mathrm{rad}} - \nabla_{\mathrm{ad}}}{\nabla - \nabla_{\mathrm{ad}}} \ . \tag{3.57}$$

Mihalas und Mihalas (1984) definieren noch die *Boltzmann-Zahl*

$$\mathrm{Bo} = \frac{\text{maximaler konvektiver Fluß}}{\text{Gesamtfluß}} = \frac{\rho c_p T v}{\sigma T_{\mathrm{eff}}^4} \ . \tag{3.58}$$

Die *Knudsen-Zahl* (Mihalas & Mihalas 1984, Gl. (29.14))

$$\mathrm{Kn} = \frac{\text{thermische freie Weglänge}}{\text{typische Länge}} = \frac{l_{\mathrm{th}}}{L} \tag{3.59}$$

sagt etwas darüber aus, ob die hydrodynamische Kontinuumsbeschreibung einer Flüssigkeit überhaupt zulässig ist, was nur für sehr kleine Knudsen-Zahlen – in unseren Modellen aber durchweg – gewährleistet ist.

In den Abbildungen 11 und 12 sind nun einige dieser charakteristischen Größen über der Höhe aufgetragen (siehe auch de Loore 1969). Wo immer nötig, wurde zu ihrer Berechnung die Druckskalenhöhe als charakteristische Länge verwendet. Als Diffusionszeitskala wurde die Strahlungsrelaxationszeit nach Gleichung (3.30) und für die viskose Zeitskala die Viskosität aufgrund von Teilchendiffusion nach Gleichung (3.34) (und nicht die Strahlungsviskosität) verwendet. Zur Berechnung der Graßhof- und der Rayleigh-Zahl wurde der Betrag der Brunt-Väisälä-Frequenz zugrundegelegt, die am Rande der konvektiv instabilen Gebiete Nullstellen besitzt, die sich dann in den nach unten zeigenden Spitzen in diesen beiden Zahlen in den Graphiken bemerkbar machen.

Offensichtlich sind die Zahlen nicht konstant, sondern variieren jeweils über mehrere Zehnerpotenzen. Was läßt sich nun aus diesen Zahlen für den Typ der in stellaren Hüllen auftretenden Konvektion schließen? Zuerst einmal ist die Rayleigh-Zahl so groß, daß trotz Strahlung und Viskosität die konvektive Instabilität zum Auftreten von Konvektionszonen führen wird. Die enorme Größe der Rayleigh- und der Reynolds-Zahl führt dazu, daß die Konvektion nicht die aus den Bénard-Experimenten bekannten stationären Strömungsformen sondern ein turbulentes Verhalten zeigen wird. Für die großskaligen Strömungen spielt der Energieaustausch durch Strahlung eine wesentlich wichtigere Rolle als die Reibungsverluste durch Viskosität, wie man aus der Winzigkeit der Prandtl-Zahl ersieht. Schon für Strömungselemente auf der Größenskala der Druckskalenhöhe wird der Strahlungstransport wichtig. In der Gegend von $z = 0$ ist die Strahlungsrelaxationszeit sogar kürzer als die Strömungszeitskala, was sich in einer Péclet-Zahl deutlich kleiner als eins ausdrückt. Hier wird es die Konvektionsströmung schwer haben, gegen den Einfluß der Strahlung anzuarbeiten, die bestrebt ist, Temperaturfluktuationen auszugleichen und eine Strahlungsgleichgewichtsschichtung herzustellen. Wie sich herausstellen wird, ähnelt die Temperaturschichtung in den Aufströmgebieten im wesentlichen einer Strahlungsgleichgewichtsschichtung, während sie in den Abströmkanälen extreme Abweichungen hiervon zeigen kann.

Anders gelagert ist der Fall beim Einfluß der Viskosität. Viskose und Strömungszeitskalen liegen so weit auseinander (beachte die riesige Graßhof-Zahl), daß die Dissipation durch molekulare Viskosität keinen direkten Einfluß auf die konvektiven Elemente haben kann. Nur über den Umweg einer turbulenten Kaskade kann kinetische Energie aus den konvektiven Elementen auf die kleinen Skalen, auf denen Viskosität wirksam wird, übertragen werden.

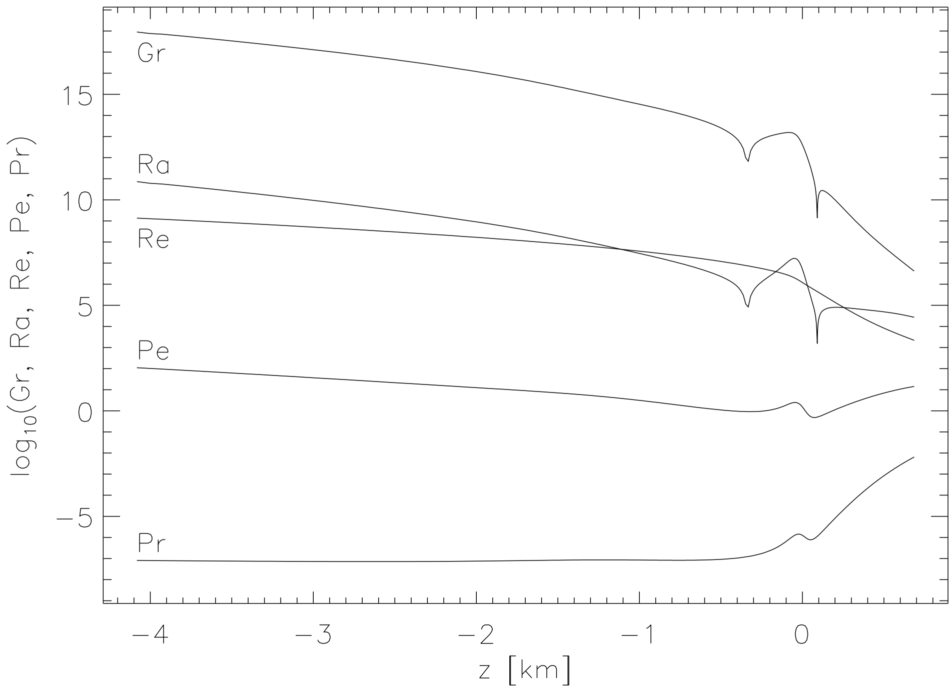


Abbildung 11: Charakteristische dimensionslose Größen eines DA Weißen Zwerges mit $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$ und $\log g = 8.00$. Über der Höhe z wurden die Graßhof-Zahl Gr, die Rayleigh-Zahl Ra, die Reynolds-Zahl Re, die Péclet-Zahl Pe und die Prandtl-Zahl Pr nach Gl. (3.41) aufgetragen. Als Diffusionszeitskala wurde die Strahlungsrelaxationszeitskala, als viskose Zeitskala die molekulare gewählt.

3.6 Konvektive Instabilität

Wann ist nun eine vorgegebene Schichtung instabil gegen konvektive Störungen? Um ein Stabilitätskriterium zu finden, betrachtet man ein kleines Flüssigkeitselement (z.B. eine Blase), die ein kleines Stück Δz vertikal aus ihrer Gleichgewichtsposition ausgelenkt wird. Diese Auslenkung soll so schnell erfolgen, daß die Blase keinerlei Energie mit der Umgebung durch Strahlungstransport austauschen kann, d.h. die Bewegung soll adiabatisch erfolgen. Andererseits soll die Auslenkung so langsam stattfinden, daß Druckstörungen Zeit haben, sich auszugleichen, so daß die Blase sich immer im Druckgleichgewicht mit ihrer Umgebung befindet. Das heißt im wesentlichen, daß die Auslenkungsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit sein soll.

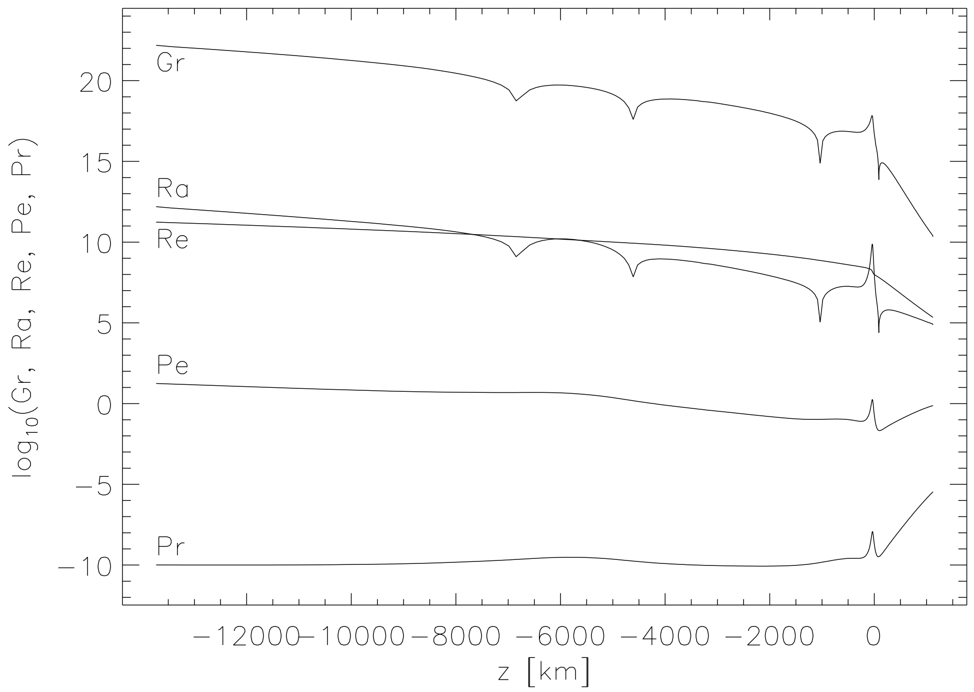


Abbildung 12: Charakteristische dimensionslose Größen eines Hauptreihen-A-Sterns mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$ und $\log g = 4.40$. Über der Höhe z wurden die Graßhof-Zahl Gr, die Rayleigh-Zahl Ra, die Reynolds-Zahl Re, die Péclet-Zahl Pe und die Prandtl-Zahl Pr nach Gl. (3.41) aufgetragen. Als Diffusionszeitskala wurde die Strahlungsrelaxationszeitskala, als viskose Zeitskala die molekulare gewählt.

Im allgemeinen wird die Dichte des Elements ρ_{el} sich von der Dichte ρ der Umgebung unterscheiden, und man findet für die Dichtefluktuation

$$\Delta\rho = \rho_{\text{el}} - \rho \approx \frac{d\Delta\rho}{dz}\Delta z = \left(\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{el}} - \frac{d\rho}{dz} \right) \Delta z \ . \tag{3.60}$$

Daraus resultiert die Beschleunigung durch Auftriebskraft

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z = \frac{f_{\text{buo}}}{\rho} = \frac{-g\Delta\rho}{\rho} = \frac{-g}{\rho} \left(\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{el}} - \frac{d\rho}{dz} \right) \Delta z \ . \tag{3.61}$$

Diese einfache Bewegungsgleichung besitzt Lösungen der Form

$$\Delta z(t) = \Delta z_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\text{BV}} t} \tag{3.62}$$

mit der *Brunt-Väisälä-Frequenz* ω_{BV} (manchmal auch mit N bezeichnet), die gegeben ist durch

$$\omega_{\text{BV}}^2 = \frac{g}{\rho} \left(\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{el}} - \frac{d\rho}{dz} \right) \tag{3.63}$$

$$= g \left(\left.\frac{d\ln\rho}{dz}\right|_{\text{el}} - \frac{d\ln\rho}{dz} \right) \tag{3.64}$$

$$= g \left(\left.\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln P}\right|_{s} \frac{d\ln P}{dz} - \frac{d\ln\rho}{dz} \right) \tag{3.65}$$

$$= g \left(\frac{1}{H_\rho} - \frac{1}{\Gamma_1 H_p} \right) \tag{3.66}$$

oder

$$\omega_{\mathrm{BV}}^2 = g\left(\left.\frac{d\ln\rho}{dz}\right|_{\mathrm{el}} - \frac{d\ln\rho}{dz}\right) \tag{3.67}$$

$$= g\left.\frac{\partial\ln\rho}{\partial T}\right|_P \left(\left.\frac{dT}{dz}\right|_{\mathrm{el}} - \frac{dT}{dz}\right) \tag{3.68}$$

$$= g\left.\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln T}\right|_P \left(\left.\frac{d\ln T}{dz}\right|_{\mathrm{el}} - \frac{d\ln T}{dz}\right) \tag{3.69}$$

$$= \frac{g\delta}{H_p}\left(\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla\right) \quad . \tag{3.70}$$

Gilt $\omega_{\mathrm{BV}}^2 > 0$, wirken die Auftriebskräfte rücktreibend, und es ergibt sich eine oszillatorische Bewegung. Für $\omega_{\mathrm{BV}}^2 < 0$ erhält man eine imaginäres $\omega_{\mathrm{BV}} = \pm\mathrm{i}\,|\omega_{\mathrm{BV}}|$, und es entsteht eine Bewegung mit exponentiell wachsender oder fallender Amplitude. Mit Gleichung (3.70) (Der erste Bruch ist immer positiv.) folgt das *Schwarzschild-Kriterium* für konvektive Instabilität

$$\boxed{\text{Konvektive Instabilität} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla > \nabla_{\mathrm{ad}}} \quad . \tag{3.71}$$

Übersteigt der Temperaturgradient ∇ also seinen adiabatischen Wert ∇_{ad}, ist die Schicht gegen konvektive Störungen instabil, und es bildet sich eine Konvektionszone aus.

Durch folgende Überlegung zeigt sich, daß die Ableitung der Entropie s nach der Höhe z als Instabilitätsindikator verwendet werden kann: Sei $s = s(P,T)$. Dann gilt

$$\frac{ds}{dz} = \left.\frac{\partial s}{\partial\ln P}\right|_T \frac{d\ln P}{dz} + \left.\frac{\partial s}{\partial\ln T}\right|_P \frac{d\ln T}{dz} \tag{3.72}$$

$$= -\left(\left.\frac{\partial\ln P}{\partial\ln T}\right|_s \left.\frac{\partial\ln T}{\partial s}\right|_P\right)^{-1} \frac{d\ln P}{dz} + \left.\frac{\partial s}{\partial\ln T}\right|_P \frac{d\ln T}{d\ln P}\frac{d\ln P}{dz} \tag{3.73}$$

$$= -\nabla_{\mathrm{ad}}c_p\left(-\frac{1}{H_p}\right) + c_p\nabla\left(-\frac{1}{H_p}\right) \tag{3.74}$$

$$= \frac{c_p}{H_p}\left(\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla\right) \tag{3.75}$$

$$= \frac{c_p}{g\delta}\,\omega_{\mathrm{BV}}^2 \quad . \tag{3.76}$$

Da der Bruch der rechten Seite der letzten Zeile immer positiv ist, ist das Schwarzschild-Kriterium (3.71) für konvektive Instabilität also genau dann erfüllt, wenn die Entropieableitung negativ ist,

$$\boxed{\text{Konvektive Instabilität} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ds}{dz} < 0} \quad . \tag{3.77}$$

3.7 Lokales Modell, Rayleigh-Zahl

In der obigen Ableitung wurde ausdrücklich vorausgesetzt, daß das ausgelenkte Flüssigkeitselement keinen Energieaustausch mit der Umgebung erfährt. Im folgenden soll nun grob abgeschätzt werden, welchen Einfluß Strahlung und Viskosität besitzen. Das Modell basiert auf einer Untersuchung von Ludwig und Steffen (1991).

Ich betrachte einen Kasten der Höhe L und der Breite aL, d.h. a soll das Seitenverhältnis beschreiben. In diesem Kasten soll sich eine ganze „Konvektionszelle“ mit Auf- und Abströmgebiet und den horizontalen Ausgleichströmen befinden. Ich nehme an (wie dies auch in der Mischungswegtheorie geschieht), daß sich die Strömung und die thermodynamischen Größen im Kasten durch charakteristische Werte beschreiben lassen. Die typische Vertikalgeschwindigkeit sei v. Aufgrund der Kontinuitätsgleichung ergibt sich damit eine typische Horizontalgeschwindigkeit von av. Sei ΔT der Temperaturunterschied zwischen auf- und absteigender Materie, der zu einem Dichteunterschied $\Delta\rho$ führt. Die Geschwindigkeit im Modell ändert sich aufgrund von Auftriebs- und viskosen Kräften. Letztere führen zu einem Abklingen der Geschwindigkeit auf der Zeitskala $t_{\rm vis}$. Also erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g\Delta\rho/\rho}{1+a^2} - \frac{v}{t_{\rm vis}} \tag{3.78}$$

$$= \frac{g\alpha_T\Delta T}{1+a^2} - \frac{v}{t_{\rm vis}} \ . \tag{3.79}$$

Der Faktor $(1 + a^2)$ wurde eingeführt, um zu berücksichtigen, daß nur ein Teil der kinetischen Energie, die durch die Auftriebsarbeit erzeugt wird, in vertikale Bewegung umgesetzt wird. Der Rest führt zu einer horizontalen Beschleunigung.

Die zeitliche Änderung der Temperaturfluktuationen läßt sich durch die Energiegleichung

$$\frac{d\Delta T}{dt} = \left(\left.\frac{dT}{dz}\right|_{\rm ad} - \frac{dT}{dz}\right) v - \frac{\Delta T}{t_{\rm rad}} \tag{3.80}$$

beschreiben. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Temperaturänderung aufgrund adiabatischer Bewegung eines Flüssigkeitselements. Der zweite Term beschreibt den Temperaturausgleich durch Strahlungsaustausch als Newtonschen Kühlungsprozeß, der auf der Zeitskala $t_{\rm rad}$ ablaufen soll.

Leitet man Gleichung (3.79) nach t ab und eliminiert ΔT mit Hilfe von (3.80), so ergibt sich

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{g\alpha_T}{1+a^2}\frac{d\Delta T}{dt} - \frac{1}{t_{\rm vis}}\frac{dv}{dt} \tag{3.81}$$

$$= \frac{g\alpha_T}{1+a^2}\left[\left(\left.\frac{dT}{dz}\right|_{\rm ad} - \frac{dT}{dz}\right) v - \frac{\Delta T}{t_{\rm rad}}\right] - \frac{1}{t_{\rm vis}}\frac{dv}{dt} \tag{3.82}$$

$$= \frac{g\alpha_T}{1+a^2}\left[\left(\left.\frac{dT}{dz}\right|_{\rm ad} - \frac{dT}{dz}\right) v\right] - \left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{t_{\rm vis}}\right)\frac{1}{t_{\rm rad}} - \frac{1}{t_{\rm vis}}\frac{dv}{dt} \tag{3.83}$$

$$= \frac{1}{1+a^2}\frac{v}{t_{\rm BV}^2} - \left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{t_{\rm vis}}\right)\frac{1}{t_{\rm rad}} - \frac{1}{t_{\rm vis}}\frac{dv}{dt} \tag{3.84}$$

$$= -\left(\frac{1}{t_{\rm vis}} + \frac{1}{t_{\rm rad}}\right)\frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{(1+a^2)\,t_{\rm BV}^2} - \frac{1}{t_{\rm vis}t_{\rm rad}}\right) v \ , \tag{3.85}$$

wobei $t_{\rm BV} = 1/\omega_{\rm BV}$ gesetzt wurde. Diese Gleichung läßt sich mit Hilfe der dimensionslosen Größen Ra und Pr schreiben als

$$\frac{d^2v}{(dt/t_{\rm BV})^2} = -\frac{1}{\sqrt{\rm Ra}}\left(\frac{1}{\sqrt{\rm Pr}} + \sqrt{\rm Pr}\right)\frac{dv}{dt/t_{\rm BV}} + \left(\frac{1}{(1+a^2)} - \frac{1}{\rm Ra}\right) v \ . \tag{3.86}$$

Die einfache lineare Differentialgleichung (3.85) läßt sich mit Hilfe des Ansatzes

$$v = v_0 \mathrm{e}^{\Omega t} \tag{3.87}$$

lösen, und man erhält die charakteristische Gleichung

$$\Omega^2 + \left(\frac{1}{t_{\rm vis}} + \frac{1}{t_{\rm rad}}\right)\Omega + \left(\frac{1}{t_{\rm vis}t_{\rm rad}} - \frac{1}{(1+a^m2)\,t_{\rm BV}^2}\right) = 0 \tag{3.88}$$

mit den Wurzeln

$$\Omega_\pm = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_{\mathrm{vis}}} + \frac{1}{t_{\mathrm{rad}}}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{1+a^2}\frac{1}{t_{\mathrm{BV}}^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t_{\mathrm{vis}}} - \frac{1}{t_{\mathrm{rad}}}\right)^2} \tag{3.89}$$

bzw.

$$\frac{\Omega_\pm}{\omega_{\mathrm{BV}}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ra}}}\left(\sqrt{\mathrm{Pr}} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{4\mathrm{Ra}}\left(\sqrt{\mathrm{Pr}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}\right)^2} \; . \tag{3.90}$$

Offensichtlich gilt immer $\Omega_- < 0$. Mit

$$\Omega_-\Omega_+ = \frac{1}{t_{\mathrm{vis}}t_{\mathrm{rad}}} - \frac{1}{(1+a^2)\,t_{\mathrm{BV}}^2} \tag{3.91}$$

folgt

$$\mathrm{sign}\Omega_+ = -\mathrm{sign}\left(\frac{1}{t_{\mathrm{vis}}t_{\mathrm{rad}}} - \frac{1}{(1+a^2)\,t_{\mathrm{BV}}^2}\right) \quad , \tag{3.92}$$

und man erhält das *Instabilitätskriterium*

$$\boxed{\Omega_+ > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+a^2)\,t_{\mathrm{BV}}^2 < t_{\mathrm{vis}}t_{\mathrm{rad}}} \tag{3.93}$$

bzw.

$$\boxed{\Omega_+ > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{krit}} = 1 + a^2} \; . \tag{3.94}$$

Erst wenn die Rayleigh-Zahl Ra einen kritischen Wert $\mathrm{Ra}_{\mathrm{krit}}$ überschreitet, wird das Modell gegen konvektive Störungen instabil. Die Prandtl-Zahl sagt etwas aus über die relative Wichtigkeit der beiden dämpfenden Effekte Strahlung und Viskosität.

In Sternen ist die viskose Zeitskala so groß und daher die kritische Rayleigh-Zahl so klein, daß sich Konvektion immer dann entwickeln kann, wenn das Schwarzschild-Kriterium (3.71) erfüllt ist. Nur weitere physikalische Effekte, die z.B. von Magnetfeldern verursacht werden, könnten die Konvektion unterdrücken.

4 Linearisierte Gleichungen

4.1 Herleitung der allgemeinen LAWE

In diesem Abschnitt werde ich eine Herleitung der *linearen adiabatischen Wellengleichung* (englisch „Linear Adiabatic Wave Equation“, kurz LAWE) präsentieren, ähnlich wie sie sich z.B. in Mihalas & Mihalas (1984) oder in Zhugzhda (1991) findet.

Einleitend hier kurz einige Rechenregeln für den den Operator $\vec{\nabla}$: Seien a und b skalare und $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Vektorfelder. Dann gilt

$$\vec{\nabla}(ab) = (\vec{\nabla}a)\,b + a\,(\vec{\nabla}b) \quad , \tag{4.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(a\vec{u}) = (\vec{\nabla}a)\cdot\vec{u} + a\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \quad , \tag{4.2}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = (\vec{\nabla}:\vec{\nabla})\,\vec{v} \quad , \tag{4.3}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\vec{\nabla}:\vec{u})\,\vec{v} + (\vec{\nabla}:\vec{v})\,\vec{u} \quad , \tag{4.4}$$

$$\vec{\nabla}:(a\vec{u}) = (\vec{\nabla}a):\vec{u} + a\vec{\nabla}:\vec{u} \quad , \tag{4.5}$$

wobei mit dem Symbol „:“ das dyadische Produkt bezeichnet werden soll. In vektorieller Form lauten die Grundgleichungen

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \quad , \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}:\vec{v}) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \rho\vec{g_{\mathrm{vis}}} \quad , \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}s = \frac{Q}{\rho T} \quad . \tag{4.8}$$

Alle Größen P, T, ρ, $\vec{v}$ usw. werden als Summen $x = x_0 + x_1$ geschrieben, wobei x_0 die Hintergrundschichtung beschreibt und x_1 eine kleine Eulersche Störung dieser Größe darstellt. Terme zweiter oder höherer Ordnung in x_1 werden ignoriert. Die Zeitableitung der Lagrangeschen Störung δx im mitbewegten Bezugssystem kann man dann durch

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta x = \frac{\partial}{\partial t}x_1 + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}x_0 \tag{4.9}$$

ausdrücken. Im ungestörten Fall (hydrostatische Schichtung, Strahlungsgleichgewicht) soll gelten $\vec{v}_0$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ und $Q_0 = 0$. Dann folgt $\vec{v} = \vec{v}_1$, und für die Druckschichtung erhält man

$$\vec{\nabla}P_0 = \rho_0\vec{g} \quad . \tag{4.10}$$

Die linearisierten hydrodynamischen Grundgleichungen lassen sich dann in der folgenden vektoriellen Form schreiben

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho_0 + \rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \quad , \tag{4.11}$$

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}P_1 - \rho_1\vec{g} = 0 \quad , \tag{4.12}$$

$$\rho_0 T_0\frac{\partial\delta s}{\partial t} = \rho_0 T_0\left(\frac{\partial s_1}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}s_0\right) = \delta Q \quad . \tag{4.13}$$

Betrachtet man den Druck als Funktion von Dichte und Entropie, so läßt sich für kleine Fluktuationen schreiben

$$\delta \ln P = \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_s \delta \ln \rho + \left.\frac{\partial \ln P}{\partial s}\right|_\rho \delta s \tag{4.14}$$

$$= \Gamma_1 \delta \ln \rho + \frac{1}{c_v'} \delta s \qquad \text{(Definition von } \Gamma_1 \text{ und } c_v'\text{)} \tag{4.15}$$

$$= \Gamma_1 \delta \ln \rho + \frac{(\Gamma_3 - 1)\rho T}{P} \delta s \quad \text{, mit (2.47) und (2.62)} \quad . \tag{4.16}$$

Die Größen Γ_1, Γ_3, c_v' usw. werden hierbei als Funktionen der Größen der ungestörten Schichtung betrachtet und müßten daher eigentlich mit einem Index 0 versehen werden, der aber im folgenden fortgelassen wird. Für die Zeitableitung von Druckfluktuationen erhält man mit Hilfe der linearisierten Energiegleichung (4.13)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta P}{P_0}\right) = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) + \frac{\Gamma_3 - 1}{P_0} \delta Q \quad . \tag{4.17}$$

Der Term δQ beschreibt die Entropieänderung durch Strahlung, Viskosität und Schocks. Letztere sind in einer Atmosphäre, die nur kleine Abweichungen von einer ungestörten Schichtung und folglich keine schallschnellen Strömungen aufweist, nicht vorhanden. Die turbulente Viskosität geht für kleine Geschwindigkeiten schneller als linear gegen Null. Daher können die turbulenten viskosen Kräfte und Entropiequellen also auch ignoriert werden. Die molekulare Viskosität spielt wegen der gewaltigen viskosen Zeitskalen, auf denen großskalige Störungen beeinflußt werden, ebenfalls keine Rolle. Das gilt allerdings *nicht* für den Strahlungstransport. Seine charakteristische Zeitskala ist vielfach sogar kürzer als die hydrodynamische (siehe die Abbildungen 9 und 10), d.h. der Energieaustausch durch Strahlung ist ein enorm wichtiger Prozeß. Trotzdem soll dieser Term im folgenden fortgelassen werden ($\delta Q = 0$), da seine Behandlung wegen des nichtlokalen Charakters der Strahlungstransportgleichungen große Schwierigkeiten bereitet. Das ist gerechtfertigt, weil ich die Schwingungsgleichung nicht für die genaue Bestimmung der Eigenmoden eines Sterns sondern nur für Abschätzungen und zur Identifikation der verschiedenen unterschiedlichen Schwingungsphänomene in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen verwenden werde. In diesen Simulationen wird sowohl die Nichtlokalität des Strahlungstransports als auch die Nichtlinearität des Problems voll berücksichtigt.

In Eulerscher Schreibweise läßt sich die letzte Gleichung (nach Fortlassen des Terms δQ) also ausdrücken als

$$\frac{1}{P_0}\left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P_0\right) = \frac{\Gamma_1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho_0\right) \tag{4.18}$$

oder mit Gl. (4.11)

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P_0 + \Gamma_1 P_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad . \tag{4.19}$$

Differenziert man die linearisierte Impulsgleichung (4.12) nach der Zeit

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \vec{g} = 0 \quad , \tag{4.20}$$

so erhält man mit (4.11) und (4.19) für $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ bzw. $\frac{\partial P_1}{\partial t}$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\left[-\vec{v} \cdot \vec{\nabla} P_0 - \Gamma_1 P_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right] - \left[-\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right] \vec{g} = 0 \quad . \tag{4.21}$$

Dies läßt sich unter Ausnutzung von $\vec{\nabla} P_0 = \rho_0 \vec{g}$ umformen zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\left[\vec{v}\cdot\vec{\nabla}P_0\right] - \frac{1}{\rho_0}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho_0\right)\vec{g} + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\left[\Gamma_1 P_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right] - \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right]\vec{g} && (4.22)\\
&= \frac{1}{\rho_0}\left[\left(\vec{\nabla}:\vec{v}\right)\rho_0\vec{g} + \left(\vec{\nabla}:\left(\rho_0\vec{g}\right)\right)\vec{v}\right] - \frac{1}{\rho_0}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho_0\right)\vec{g}\\
&\quad + \frac{1}{\rho_0}\left[\left(\vec{\nabla}\Gamma_1\right)P_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \Gamma_1\left(\vec{\nabla}P_0\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \Gamma_1 P_0\left(\vec{\nabla}:\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right]\\
&\quad - \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right]\vec{g} && (4.23)\\
&= \left(\vec{\nabla}:\vec{v}\right)\vec{g} + \left(\vec{\nabla}:\vec{g}\right)\vec{v} + \frac{1}{\rho_0}\left[\left(\vec{\nabla}\rho_0\right):\vec{g}\right]\vec{v} - \frac{1}{\rho_0}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho_0\right)\vec{g}\\
&\quad + \frac{\Gamma_1 P_0}{\rho_0}\left(\vec{\nabla}\ln\Gamma_1\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \left(\Gamma_1 - 1\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\vec{g} + \frac{\Gamma_1 P_0}{\rho_0}\left(\vec{\nabla}:\vec{\nabla}\right)\vec{v} && (4.24)\\
&= \vec{\nabla}\left(\vec{g}\cdot\vec{v}\right) + \frac{1}{\rho_0}\left\{\left(\vec{\nabla}\rho_0\right)\left[\vec{g}\cdot\vec{v}\right] - \vec{g}\left[\left(\vec{\nabla}\rho_0\right)\cdot\vec{v}\right]\right\}\\
&\quad + c_s^2\left(\vec{\nabla}\ln\Gamma_1\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \left(\Gamma_1 - 1\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\vec{g} + c_s^2\left(\vec{\nabla}:\vec{\nabla}\right)\vec{v}\ . && (4.25)
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in geschweiften Klammern verschwindet wegen $\vec{g} \parallel \vec{\nabla} P_0 \parallel \vec{\nabla}\rho_0$, und es ergibt sich die *Wellengleichung* (Mihalas & Mihalas 1991, Gl. (52.31))

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\left(\vec{g}\cdot\vec{v}\right) + c_s^2\left(\vec{\nabla}\ln\Gamma_1\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + \left(\Gamma_1 - 1\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)\vec{g} + c_s^2\left(\vec{\nabla}:\vec{\nabla}\right)\vec{v}}\ , \tag{4.26}$$

eine lineare partielle Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit den vier unabhängigen Variablen t, x, y und z. Sie läßt sich wegen der komplizierten Ortsabhängigkeit von Γ_1 und c_s i.a. nur numerisch lösen. Um sie durch Ausnutzung von Symmetrien weiter zu vereinfachen, beschränke ich mich auf kartesische Geometrie und konstante Schwerebeschleunigung und schreibe

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ u_y \\ v \end{pmatrix}\ ,\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}\ . \tag{4.27}$$

Mit dem Ansatz

$$v(t,x,y,z) = \hat{v}(z)\, \mathrm{e}^{i\left(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \tag{4.28}$$

und

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})(t,x,y,z) = \widehat{\nabla\vec{v}}(z)\, \mathrm{e}^{i\left(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r}\right)}\ , \tag{4.29}$$

wobei $\hat{v}(z)$ und $\widehat{\nabla\vec{v}}(z)$ die nur von der Höhe z abhängigen Amplitudenfunktionen von v bzw. $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ sind, ergibt sich für die z-Komponente von (4.26)

$$-\omega^2\hat{v} = -g\frac{d\hat{v}}{dz} - c_s^2\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\widehat{\nabla\vec{v}} + \left(\Gamma_1 - 1\right)\widehat{\nabla\vec{v}}\,(-g) + c_s^2\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz} \tag{4.30}$$

oder

$$c_s^2\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz} - \left(\Gamma_1 - 1 - \frac{c_s^2}{g}\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right)g\widehat{\nabla\vec{v}} + \omega^2\hat{v} - g\frac{d\hat{v}}{dz} = 0\ . \tag{4.31}$$

Nach z abgeleitet, wird daraus

$$\frac{dc_s^2}{dz}\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz} + c_s^2\frac{d^2\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz^2} - \frac{d}{dz}\left[\left(\Gamma_1 - 1 - \frac{c_s^2}{g}\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right)g\widehat{\nabla\vec{v}}\right] + \omega^2\frac{d\hat{v}}{dz} - g\frac{d^2\hat{v}}{dz^2} = 0. \tag{4.32}$$

Aus der Divergenz der Wellengleichung (4.26)

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} &= \vec{\nabla}^2(\vec{g}\cdot\vec{v})+\vec{\nabla}\left[c_s^2(\vec{\nabla}\ln\Gamma_1)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right] \\
&\quad +\vec{\nabla}\left[(\Gamma_1-1)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\vec{g}\right]+\vec{\nabla}\left[c_s^2(\vec{\nabla}:\vec{\nabla})\vec{v}\right] = \qquad (4.33)\\
\frac{\partial^2\vec{\nabla}\cdot\vec{v}}{\partial t^2} &= \vec{\nabla}^2(-gv)+\frac{d}{dz}\left[\left(\Gamma_1-1-\frac{c_s^2}{g}\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right)(-g)(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right] \\
&\quad +\frac{dc_s^2}{dz}\frac{d}{dz}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})+c_s^2\vec{\nabla}^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

ergibt sich mit obigem Ansatz

$$
\begin{aligned}
-\omega^2\widehat{\nabla\vec{v}} &= -g\left(-k^2\hat{v}+\frac{d^2\hat{v}}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left[\left(\Gamma_1-1-\frac{c_s^2}{g}\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right)(-g)\widehat{\nabla\vec{v}}\right] \\
&\quad +\frac{dc_s^2}{dz}\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz}+c_s^2\left(-k^2\widehat{\nabla\vec{v}}+\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz}\right)\quad , \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

wobei k durch $k^2 = k_x^2+k_y^2$ definiert ist. Zieht man hiervon die Gleichung (4.32) ab, erhält man

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega^2\widehat{\nabla\vec{v}}-g\left(-k^2\hat{v}+\frac{d^2\hat{v}}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left[\left(\Gamma_1-1-\frac{c_s^2}{g}\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right)(-g)\widehat{\nabla\vec{v}}\right] \\
&\quad +\frac{dc_s^2}{dz}\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz}+c_s^2\left(-k^2\widehat{\nabla\vec{v}}+\frac{d^2\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz^2}\right) \\
&\quad -\frac{dc_s^2}{dz}\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz}-c_s^2\frac{d^2\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz^2}+\frac{d}{dz}\left[\left(\Gamma_1-1-\frac{c_s^2}{g}\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right)g\widehat{\nabla\vec{v}}\right] \\
&\quad -\omega^2\frac{d\hat{v}}{dz}+g\frac{d^2\hat{v}}{dz^2} \\
&= \omega^2\widehat{\nabla\vec{v}}+gk^2\hat{v}-c_s^2k^2\widehat{\nabla\vec{v}}-\omega^2\frac{d\hat{v}}{dz}\quad . \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe dieser Gleichung wird $\frac{d\hat{v}}{dz}$ in (4.31) ersetzt,

$$
\begin{aligned}
& c_s^2\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz}-\left(\Gamma_1-1-\frac{c_s^2}{g}\frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right)g\widehat{\nabla\vec{v}} \;\; + \\
& \omega^2\hat{v}-g\left(\widehat{\nabla\vec{v}}-\frac{gk^2}{\omega^2}\hat{v}-\frac{c_s^2k^2}{\omega^2}\widehat{\nabla\vec{v}}\right) \;\; = \;\; 0\quad . \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Aus den letzten beiden Formeln ergibt sich schließlich das Gleichungssystem

$$
\boxed{
\begin{array}{rcccccc}
\dfrac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz} &=& \left[\dfrac{g\Gamma_1}{c_s^2}-\dfrac{d\ln\Gamma_1}{dz}-\dfrac{gk^2}{\omega^2}\right] & \widehat{\nabla\vec{v}} & + & \left[-\dfrac{\omega^2}{c_s^2}+\dfrac{g^2k^2}{c_s^2\omega^2}\right] & \hat{v} \\
\dfrac{d\hat{v}}{dz} &=& \left[1-\dfrac{c_s^2k^2}{\omega^2}\right] & \widehat{\nabla\vec{v}} & + & \dfrac{gk^2}{\omega^2} & \hat{v}
\end{array}
} \qquad (4.38)
$$

für die *lineare adiabatische Wellengleichung LAWE* in kartesischer Geometrie. Die Schreibweise ließe sich durch die Benutzung der Identität $\frac{1}{H_p} = \frac{g\Gamma_1}{c_s^2}$ noch etwas verkürzen.

Zur vollständigen Spezifikation des Problems müssen außer der Differentialgleichung noch Randbedingungen angegeben werden. Sind sie festgelegt, ergeben sich i.a. für eine

Anzahl von ω-Werten Lösungen für $\hat{v}(z)$ und $\widehat{\nabla\vec{v}}(z)$. Aus ihnen lassen sich dann weitere Größen $\hat{u}$, $\hat{\rho}$, $\hat{P}$ und $\hat{T}$ berechnen, für die ebenfalls der Ansatz

$$\rho_1(t,x,y,z) = \hat{\rho}(z)\, \mathrm{e}^{i\left(\omega t+\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \tag{4.39}$$

usw. gemacht wird. Dann erhält man für die Horizontalgeschwindigkeit

$$\hat{u} = \frac{1}{ik}\left(\frac{c_s^2 k^2}{\omega^2}\widehat{\nabla\vec{v}} - \frac{gk^2}{\omega^2}\hat{v}\right) \quad . \tag{4.40}$$

Weiter ergibt sich mit Gleichung (4.11) für die Eulersche Dichtefluktuation

$$\hat{\rho} = \frac{1}{i\omega}\left(-\frac{d\rho_0}{dz}\hat{v} - \rho_0\widehat{\nabla\vec{v}}\right) \tag{4.41}$$

und mit (4.19) für die Eulersche Druckfluktuation

$$\hat{P} = \frac{1}{i\omega}\left(g\rho_0\hat{v} - \Gamma_1 P_0\widehat{\nabla\vec{v}}\right) \quad . \tag{4.42}$$

Daraus folgt dann für die Eulersche Temperaturfluktuation

$$\frac{\hat{T}}{T_0} = \left.\frac{\partial\ln T}{\partial\ln\rho}\right|_P \frac{\hat{\rho}}{\rho_0} + \left.\frac{\partial\ln T}{\partial\ln P}\right|_\rho \frac{\hat{P}}{P_0} = -\frac{1}{\delta}\frac{\hat{\rho}}{\rho_0} + \frac{1}{\chi_T}\frac{\hat{P}}{P_0} \quad . \tag{4.43}$$

4.2 Randbedingungen

Jetzt müssen noch die Randbedingungen formuliert werden. Aus der horizontalen Ausdehnung $x_{\text{right}} - x_{\text{left}}$ des Modells ergeben sich die möglichen Werte für den Wellenvektor k

$$k = n\,\frac{2\pi}{x_{\text{right}} - x_{\text{left}}} \qquad \text{für } n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{4.44}$$

Hinzu kommen noch je eine Bedingung für den Boden und den Deckel für das aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung bestehende System (4.38).

Der einfachste Fall ist der des geschlossenen Randes in der Höhe z_0

$$\hat{v}(z_0) = 0 \quad , \tag{4.45}$$

der für den geschlossenen Boden aller meiner Modelle und für den Deckel fast aller Modelle für Weiße Zwerge verwendet wurde. Eine weitere Möglichkeit ist

$$\widehat{\nabla\vec{v}}(z_0) = 0 \quad . \tag{4.46}$$

Matthias Steffens Modelle der äußersten Hüllen sonnenähnlicher Stern besitzen jedoch eine untere Randbedingung, die das freie Einströmen von Materie (allerdings unter Beibehaltung der gesamten Masse im Modell) erlaubt. Dies entspricht für planparallele Moden ($k = 0$) wieder der Bedingung $\hat{v}(z_0) = 0$. Für die nicht planparallelen Moden ($k \neq 0$) dieser Modelle ist die Forderung $\hat{P} = 0$ angemessener, was sich mit (4.42) durch

$$g\rho_0\hat{v}(z_0) - \Gamma_1 P_0\widehat{\nabla\vec{v}}(z_0) = 0 \tag{4.47}$$

ausdrücken läßt. Die Forderung $d\hat{v}/dz(z_0) = 0$ wird mit Hilfe der zweiten Zeile von (4.38) zu

$$\left[1 - \frac{c_s^2 k^2}{\omega^2}\right]\widehat{\nabla\vec{v}}(z_0) + \frac{gk^2}{\omega^2}\hat{v}(z_0) = 0 \quad . \tag{4.48}$$

Eine weitere Möglichkeit ist $\hat{\rho}(z_0) = 0$, oder mit (4.41)

$$\frac{d\rho_0}{dz}\hat{v}(z_0) + \rho_0 \widehat{\nabla\vec{v}}(z_0) = 0 \ . \tag{4.49}$$

Alle diese Bedingungen sind reelle Linearkombinationen von $\hat{v}$ und $\widehat{\nabla\vec{v}}$. Sie liefern Lösungen mit reellem ω^2, d.h. rein oszillierende oder exponentiell abklingende bzw. wachsende Lösungen. Das ändert sich bei der offenen Randbedingung, die einen für Schallwellen durchlässigen Deckel beschreibt, der für die Modelle von Hauptreihensternen verwendet wurde. Sie lautet

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + c_s \frac{\partial v}{\partial z}\right)(z_0) = 0 \ , \tag{4.50}$$

was sich mit der zweiten Zeile von (4.38) in die Bedingung

$$i\omega\hat{v}(z_0) + c_s \left(\left[1 - \frac{c_s^2 k^2}{\omega^2}\right] \widehat{\nabla\vec{v}}(z_0) + \frac{gk^2}{\omega^2}\hat{v}(z_0)\right) = 0 \tag{4.51}$$

übersetzen läßt. Diese Linearkombination ist wegen des ersten Terms selbst bei reellem ω^2 nicht mehr reell. Sie ermöglicht Lösungen mit komplexem ω.

4.3 Einfache Sonderfälle der LAWE

4.3.1 Eindimensionale LAWE

Um die allgemeine Wellengleichung (4.38) auf den Spezialfall planparalleler Schwingungen zu reduzieren, setzt man $k = 0$ und erhält

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz} & = & \left[\dfrac{g\Gamma_1}{c_s^2} - \dfrac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right] \widehat{\nabla\vec{v}} \ + \ -\left[\dfrac{\omega^2}{c_s^2}\right] \hat{v} \\ \dfrac{d\hat{v}}{dz} & = & \widehat{\nabla\vec{v}} \end{array} \ . \tag{4.52}$$

Dieses System läßt sich jetzt leicht in eine Gleichung zusammenfassen, indem man die zweite Zeile ableitet und die erste einsetzt:

$$\frac{d^2\hat{v}}{dz^2} = \frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz} = \left[\frac{g\Gamma_1}{c_s^2} - \frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right]\frac{d\hat{v}}{dz} - \left[\frac{\omega^2}{c_s^2}\right]\hat{v} \ , \tag{4.53}$$

oder

$$\frac{d^2\hat{v}}{dz^2} - \left[\frac{g\Gamma_1}{c_s^2} - \frac{d\ln\Gamma_1}{dz}\right]\frac{d\hat{v}}{dz} + \left[\frac{\omega^2}{c_s^2}\right]\hat{v} = 0 \ . \tag{4.54}$$

4.3.2 Isotherme LAWE

Als instruktiver Spezialfall, der noch analytisch handhabbar ist aber schon wichtige Schichtungseffekte zeigt, hat sich die Wellengleichung in einer isothermen Atmosphäre erwiesen. Betrachtet man eine hydrostatische Schichtung konstanter Temperatur und vernachlässigt Ionisationseffekte, so entfällt in der Wellengleichung (4.38) der Term $d\ln\Gamma_1/dz$, und die Schallgeschwindigkeit ist konstant, d.h. daß auch ihre Ableitung nach z verschwindet. So wird (4.38) zu

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz} & = & \left[\dfrac{g\Gamma_1}{c_s^2} - \dfrac{gk^2}{\omega^2}\right] \widehat{\nabla\vec{v}} \ + \ \left[-\dfrac{\omega^2}{c_s^2} + \dfrac{g^2k^2}{c_s^2\omega^2}\right] \hat{v} \\ \dfrac{d\hat{v}}{dz} & = & \left[1 - \dfrac{c_s^2k^2}{\omega^2}\right] \widehat{\nabla\vec{v}} \ + \ \dfrac{gk^2}{\omega^2} \hat{v} \end{array} \ . \tag{4.55}$$

Dieses Gleichungssystem wird jetzt in eine Gleichung zweiter Ordnung zusammengefaßt. Dazu wird die zweite Zeile nach z abgeleitet, die Identität $dc_s^2/dz = 0$ ausgenutzt und $\widehat{\nabla\vec{v}}$ eliminiert:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\hat{v}}{dz^2} &= \left[1-\frac{c_s^2k^2}{\omega^2}\right]\frac{d\widehat{\nabla\vec{v}}}{dz}+\frac{gk^2}{\omega^2}\frac{d\hat{v}}{dz} && (4.56)\\
&= \left[1-\frac{c_s^2k^2}{\omega^2}\right]\left\{\left[\frac{g\Gamma_1}{c_s^2}-\frac{gk^2}{\omega^2}\right]\widehat{\nabla\vec{v}}+\left[-\frac{\omega^2}{c_s^2}+\frac{g^2k^2}{c_s^2\omega^2}\right]\hat{v}\right\}+\frac{gk^2}{\omega^2}\frac{d\hat{v}}{dz} && (4.57)\\
&= \left[\frac{g\Gamma_1}{c_s^2}-\frac{gk^2}{\omega^2}\right]\left[1-\frac{c_s^2k^2}{\omega^2}\right]\widehat{\nabla\vec{v}}+ \\
&\quad \left[1-\frac{c_s^2k^2}{\omega^2}\right]\left[-\frac{\omega^2}{c_s^2}+\frac{g^2k^2}{c_s^2\omega^2}\right]\hat{v}+\frac{gk^2}{\omega^2}\frac{d\hat{v}}{dz} && (4.58)\\
&= \left[\frac{g\Gamma_1}{c_s^2}-\frac{gk^2}{\omega^2}\right]\left[\frac{d\hat{v}}{dz}-\frac{gk^2}{\omega^2}\hat{v}\right]+ \\
&\quad \left[1-\frac{c_s^2k^2}{\omega^2}\right]\left[-\frac{\omega^2}{c_s^2}+\frac{g^2k^2}{c_s^2\omega^2}\right]\hat{v}+\frac{gk^2}{\omega^2}\frac{d\hat{v}}{dz} && (4.59)\\
&= \frac{g\Gamma_1}{c_s^2}\frac{d\hat{v}}{dz}+\left[k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}+(\Gamma_1-1)\frac{g^2k^2}{c_s^2\omega^2}\right]\hat{v}\ . && (4.60)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\hat{v}}{dz^2}-\frac{g\Gamma_1}{c_s^2}\frac{d\hat{v}}{dz}+\left[k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}+(\Gamma_1-1)\frac{g^2k^2}{c_s^2\omega^2}\right]\hat{v}=0\ , \tag{4.61}$$

die unter Beachtung von $1/H_p = \Gamma_1 g/c_s^2$ mit dem Ansatz

$$\hat{v}(z)=\hat{v}_0\,\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2H_p}+ik_z\right)z}\ , \tag{4.62}$$

der durch den Faktor

$$\mathrm{e}^{\frac{z}{2H_p}}=\mathrm{e}^{\frac{z}{2H_\rho}}\propto\frac{1}{\sqrt{\rho(z)}} \tag{4.63}$$

die Höhenabhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude schon berücksichtigt, auf die Dispersionsrelation

$$\omega^4-c_s^2\left(k^2+k_z^2+\frac{1}{4H_p^2}\right)\omega^2+k^2g^2(\Gamma_1-1)=0 \tag{4.64}$$

führt. In einer isothermen Atmosphäre gilt

$$H_p=H_\rho\ , \tag{4.65}$$

und man erhält für die Brunt-Väisälä-Frequenz

$$\omega_{\mathrm{BV}}^2=g\left(\frac{1}{H_\rho}-\frac{1}{\Gamma_1 H_p}\right)=\frac{g}{H_p}\left(1-\frac{1}{\Gamma_1}\right)=\frac{g^2}{c_s^2}(\Gamma_1-1)=\frac{4(\Gamma_1-1)}{\Gamma_1^2}\omega_{\mathrm{ac}}^2\ . \tag{4.66}$$

Schließlich folgt die *Dispersionsrelation* einer isothermen Atmosphäre in natürlichen Einheiten

$$\boxed{\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{ac}}}\right)^4-\left(\frac{k^2+k_z^2}{(1/2H_p)^2}+1\right)\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{ac}}}\right)^2+\frac{k^2}{(1/2H_p)^2}\left(\frac{\omega_{\mathrm{BV}}}{\omega_{\mathrm{ac}}}\right)^2=0}\ , \tag{4.67}$$

deren Verlauf im diagnostischen Diagramm 13 dargestellt ist. Für den Speziallfall einer ungeschichteten Atmosphäre ohne Schwerebeschleunigung führt Gl. (4.64) auf die bekannte Dispersionsrelation

$$\omega^2 = c_s^2 \left(k^2 + k_z^2\right) \tag{4.68}$$

für normale Schallwellen. Aber in Anwesenheit eines Schwerefelds ergibt sich eine we-

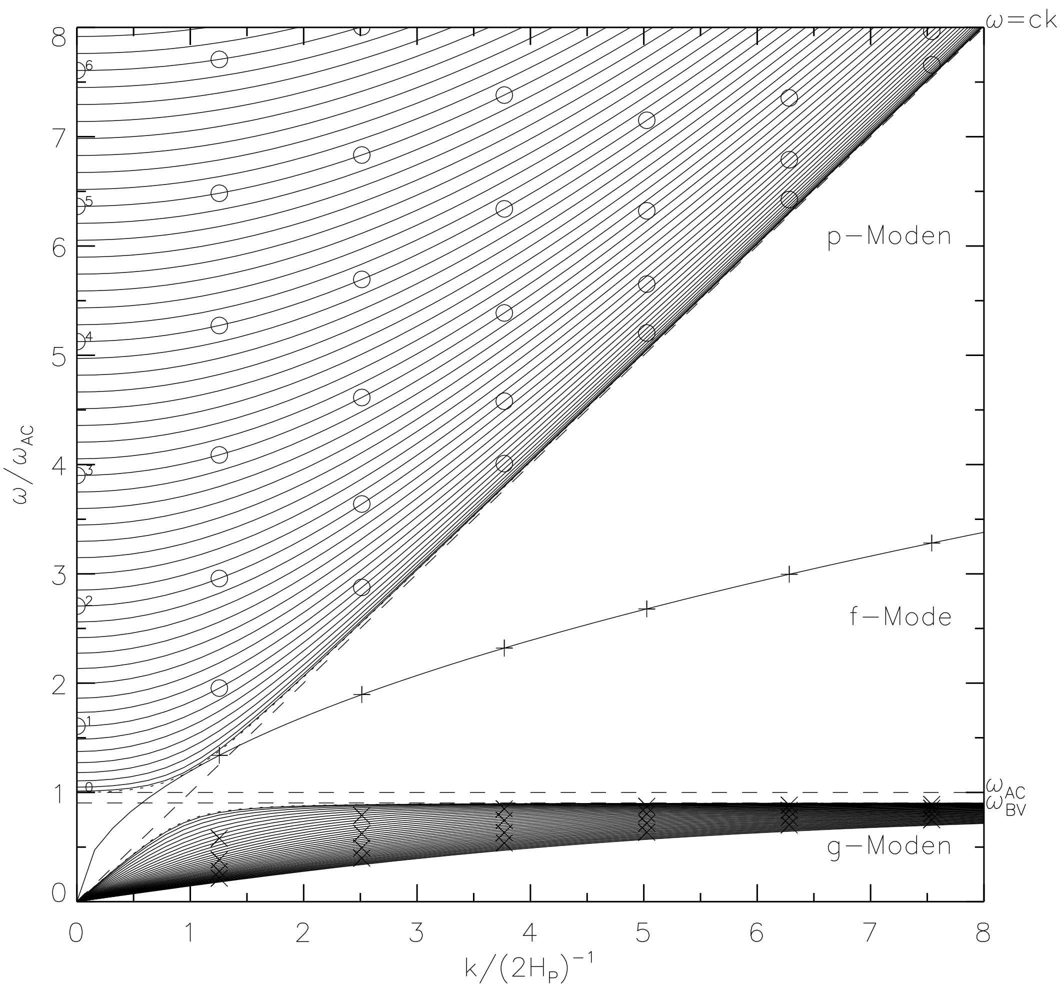


Abbildung 13: Dispersionsrelation einer isothermen Schichtung. Die Kreisfrequenz ω ist über der horizontalen Wellenzahl k aufgetragen. Kurvenparameter ist die vertikale Wellenzahl k_z. Für Γ_1 wurde ein repräsentativer Wert von 1.4 verwendet. Die durchgezogenen Kurven stellen einige der möglichen Lösungen in einer unendlich ausgedehnten Atmosphäre dar. Die Kreise, Pluszeichen und Kreuze markieren Lösungen, die bei einer Modellausdehnung von $z_{\text{total}} = x_{\text{total}} = 10H_p$ auftreten.

sentlich kompliziertere Situation: Nach Cowling (1941, siehe auch Cox 1980) klassifiziert man die möglichen Schwingungsformen folgendermaßen (siehe auch die Abbildung 74):

p-Moden (p für „pressure“) Diese Moden entsprechen den Schallwellen in einer Atmosphäre ohne Schwerefeld, denn die Hauptrückstellkraft liefert der Druck. Für genügend große ω kann man den konstanten Term auf der rechten Seite von Gl. (4.67) ignorieren und erhält als genäherte Dispersionsrelation für p-Moden

$$\omega^2 = \left(\frac{k^2 + k_z^2}{(1/2H_p)^2} + 1 \right) \omega_{\mathrm{ac}}^2 \quad . \tag{4.69}$$

Schon aus dieser Formel wird deutlich, daß diese Schwingungen nur oberhalb einer *Grenzfrequenz*, der akustischen Cutoff-Frequenz ω_{ac} existieren. Abgesehen davon zeigt ihre Dispersionsrelation aber ein normales Verhalten: Je kurzwelliger die Schwingung (je größer k oder k_z), desto höher die Frequenz ω. Planparallele Schwingungen sind möglich. Für p-Moden gilt: $\mathrm{rot}\vec{v} \approx 0$.

p-Moden finden sich in in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen wieder: Planparallele Schwingungen entstehen als zeitlich abklingendes Einstellphänomen nach dem Start einer Simulation mit einer Schichtung, die sich nicht exakt im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, oder in einigen A-Stern-Modellen als bis zu einem Grenzwert wachsende Moden, die ihre Energie durch einen in der Wasserstoffionisationszone wirkenden κ-Mechanismus beziehen. In den Hauptreihenmodellen wird das Verschmelzen zweier Jets üblicherweise von der Aussendung von Schallwellen begleitet.

g^+-Moden (g für „gravity“) Diese Schwerewellen existieren nur aufgrund der Schwerkraft, die den wesentlichen Anteil an der Rückstellkraft liefert. Für kleine Frequenzen ω kann man den ersten Term in Gl. (4.67) vernachlässigen und erhält die genäherte Dispersionsrelation für g-Moden

$$\omega^2 = \frac{\frac{k^2}{(1/2H_p)^2}}{\frac{k^2+k_z^2}{(1/2H_p)^2} + 1} \, \omega_{\mathrm{BV}}^2 \quad . \tag{4.70}$$

Offensichtlich existieren g-Moden nur unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz, der *Brunt-Väisälä-Frequenz* ω_{BV}. Dies ist nicht die einzige Merkwürdigkeit ihrer Dispersionsrelation. Es gilt weiterhin: Je größer k (bei konstantem k_z) ist, desto größer wird ω und strebt gegen den Grenzwert ω_{BV}. Aber je größer k_z (bei konstantem k) ist, desto *niedriger* wird ω, was man anhand der folgenden Überlegung leicht verstehen kann: Die Rückstellkraft ist die Auftriebskraft, die auf horizontale Dichtefluktuationen wirkt, die durch unterschiedliche *vertikale* Geschwindigkeiten entstehen. Die Trägheitskraft wirkt sowohl der *vertikalen* als auch der *horizontalen* Beschleunigung entgegen. Bei Moden mit im Vergleich zur vertikalen kleiner horizontaler Wellenlänge wird die Vertikalgeschwindigkeit dominieren. Das Verhältnis von Rückstellkraft zu Trägheitskraft und damit ω ist maximal. Verkleinert man die vertikale Wellenlänge, so erhöht sich der relative Beitrag der horizontalen Bewegungen zum Trägheitsterm. Das Verhältnis von Rückstellkraft zu Trägheitskraft und also auch ω sinkt. Im planparallelen Fall $k = 0$, also ohne horizontale Dichtefluktuationen, können keine Schwerewellen auftreten. Für g-Moden gilt: $\mathrm{div}\vec{v} \approx 0$. Sie zeichnen sich üblicherweise durch hohe Horizontalgeschwindigkeiten aus.

Diese Moden konnten in unseren Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen bisher nicht identifiziert werden, obwohl sie schon in anderen Untersuchungen gefunden wurden (Hurlburt et al. 1986, 1994, Andersen 1994).

f-Mode (f für „fundamental“) Die Fundamental-Mode ist eine Art Oberflächenwelle, da sich ihr Vertikalgeschwindigkeitsmaximum (Sie besitzt nur ein lokales Vertikalgeschwindigkeitsmaximum) dicht unter dem oberen Rand des Modells befindet. Sie besitzt eine gewisse Verwandtschaft mit g^+-Moden, aber die Brunt-Väisälä-Frequenz bedeutet für sie keine obere Grenzfrequenz. p- und g^+-Moden besitzen eine reelle vertikale Wellenzahl k_z. Sie sind *propagierend.* Ihre Amplitude oszilliert mit der Höhe. Die f-Mode liegt in einem Bereich des diagnostischen Diagramms 13, in dem nur Lösungen mit imaginärer vertikaler Wellenzahl k_z, sogenannte *evaneszente* Moden, möglich sind. D.h. ihre Amplitude ändert sich monoton mit der Höhe. Die Bewegung besteht in einem Heben und Senken der Atmosphäre, wobei die Bewegung für alle Punkte mit gleicher horizontaler Koordinate synchron erfolgt. In die Dispersionsrelation (4.67) geht die Wellenzahl k_z nur quadratisch ein, d.h. es gilt $\omega(k_z) = \omega(-k_z)$. Die f-Mode wird nun aus solch einem Paar von evaneszenten Moden mit $(k_z, -k_z)$ zusammengesetzt und zwar so, daß untere und obere Randbedingung (z.B. $v = 0$) erfüllt werden. Die genäherte Dispersionsrelation für f-Moden lautet

$$\omega^2 = gk \ , \tag{4.71}$$

wobei die exakte Form von den Randbedingungen und der vertikalen Modellausdehnung abhängt. Für die Dispersionsrelation (4.71) verschwindet der Term vor $\hat{v}$ in der ersten Zeile des Gleichungssystems (4.38), was zu einer Entkopplung dieses Systems führt: Man kann zuerst die erste Zeile und dann mit diesem Ergebnis die zweite Zeile integrieren. Die Dispersionsrelation (4.71) behält auch im nicht isothermen Fall ihre Gültigkeit, und sie zeigt, daß es keine planparallelen f-Moden gibt.

Die f-Mode ist in den Modellen von Weißen Zwergen vorhanden. Ihre Amplitude nimmt jedoch mit zunehmender Effektivtemperatur (und abnehmender Vehemenz der Konvektion) ab. In den beiden heißesten Modellen (mit Effektivtemperaturen von 13800 K und 14200 K) ist sie nicht mehr nachweisbar. Sie wird angeregt, wenn zwei Abströmgebiete verschmelzen und einen tiefreichenden Abströmkanal mit kurzzeitig erhöhter Vertikalgeschwindigkeit erzeugen.

g^--Moden (g für „gravity“) Diese zeitlich exponentiell wachsenden oder abklingenden konvektiven Moden erfahren ihren Antrieb durch die Schwerkraft. Sie besitzen ein imaginäres ω und können nur auftreten, wenn auch die Brunt-Väisälä-Frequenz imaginär ist, was in einer isothermen Atmosphäre nach Gleichung (4.66) ein Γ_1 kleiner als 1 erfordern würde, was aber physikalisch unmöglich ist. Trotzdem besitzen sie eine enge Verwandtschaft zu den g^+-Moden, und man kann daher annehmen, daß die genäherte Dispersionsrelation (4.70) auch für sie (jetzt mit einem imaginären ω_{BV}) in etwa zutrifft. Auch die g^--Moden besitzen keine planparallele Form, und für große horizontale Wellenzahlen geht ihre Frequenz ebenfalls gegen die Brunt-Väisälä-Frequenz.

Sie können in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen über den Bereich, in dem die Annahme der Linearität gültig ist, hinauswachsen und gehen schließlich in *Konvektion* über. Daß auch voll entwickelte, turbulente Konvektion in Anwesenheit von Strahlungstransport nicht alle Eigenschaften von linearen g^--Moden verliert, wird sich später noch zeigen.

Transversale Moden entsprechen den toroidalen Moden bei einem kugelsymmetrischen Modell (Cox 1980, S. 222). Sie ergeben sich aus der trivialen Lösung des

Gleichungssystems (4.38): $\widehat{\nabla \vec{v}} = 0$, $\hat{v} = 0$. Diese Bedingungen erlauben noch Geschwindigkeitsfelder ohne vertikale Komponente aber mit horizontal konstanter, aber vertikal beliebig variierender Horizontalgeschwindigkeit. Solch ein Geschwindigkeitsfeld ist zeitlich konstant und planparallel, d.h. diese Moden besitzen die einfache „Dispersionsrelation“

$$\omega = 0 \ , \ k = 0 \ . \tag{4.72}$$

Sie sind notwendig, um die Gesamtmenge der Moden zu einem vollständigen Funktionensystem zu machen.

Auch diese Moden finden sich in den Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen. Sie sind dort wegen der periodischen seitlichen Randbedingungen erlaubt. Ihre Entstehung wird begünstigt, wenn das Modell im Mittel nur wenig mehr als ein Abströmgebiet enthält. Diese Gebiete sind i.a. nicht spiegelsymmetrisch, und diese Asymmetrie kann dazu führen, daß ein einzelner dominierender Jet dem gesamten Modell seine asymmetrische Strömungsform aufzwingen kann. Dann kann z.B. die mittlere Horizontalgeschwindigkeit im Overshootgebiet der Photosphäre positiv sein, wohingegen die mittlere Horizontalgeschwindigkeit im Overshootgebiet unter der Konvektionszone negativ ist. Umfaßt das Modell jedoch genügend Abströmgebiete, die laufend neu entstehen und wieder verschmelzen, so heben sich die Einzeleffekte dieser Gebiete gegenseitig weitgehend auf, und großräumige laminare Strömungsmuster treten kaum in Erscheinung.

Die horizontale Wellenzahl k wird man normalerweise rein reell wählen, um geschlossene oder periodische seitliche Randbedingungen zu erfüllen (Gleichung (4.44)). Die vertikale Wellenzahl k_z und die Kreisfrequenz ω der Schwingung können je nach Art der Schichtung, Typ der Mode und Formulierung der Randbedingungen reell, imaginär oder sogar echt komplex werden.

Betrachtet man das reine Differentialgleichungssystem (4.38) ohne Randbedingungen, so gibt es zu jeder Mode mit gewissen Werten (ω, k, k_z) eine ganze Schar von Lösungen mit $(\pm\omega, \pm k, \pm k_z)$, die sich linear überlagern lassen, um auf diese Weise z.B. stehende oder laufende Wellen zu erzeugen. Da Moden mit gleichem Realteil die gleiche Welle beschreiben, sind aber nicht alle 8 Lösungen voneinander unabhängig, sondern man erhält nur 4 Basislösungen.

4.3.3 Abweichungen von der Isothermie

Die vereinfachende Annahme der Isothermie mag für kleine Teile einer Sternphotosphäre angemessen sein. Sie ist jedoch für die Strahlungs-Hydrodynamik-Modelle und erst recht für ganze Sterne nicht mehr gerechtfertigt.

Die Zunahme der Temperatur mit der Tiefe in den optisch dicken Schichten führt zu einem Anwachsen von Schallgeschwindigkeit und Druckskalenhöhe und zu einem Absinken der akustischen Cutoff-Frequenz. Durch die Variation der Schallgeschwindigkeit mit der Tiefe werden Schallwellen, die z.B. schräg nach unten laufen, gebeugt, bis sie waagerecht laufen und schließlich nach oben gelenkt werden. Diese werden in den tiefen Schichten nicht evaneszent, weil ihre Frequenz unter die lokale Cutoff-Frequenz fällt, sondern weil sich ihre vertikale Wellenzahl immer mehr verkleinert, bis sie schließlich von reellen zu imaginären Werten umschlägt. Die Tiefe, in der dies passiert, wird jedoch in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen normalerweise nicht erreicht. Eine p-Mode, deren Frequenz in einer Schicht über der lokalen akustischen Cutoff-Frequenz liegt, die dort also propagiert, kann u.U. in höheren Schichten die Cutoff-Frequenz unterschreiten und evaneszent werden. Auf diese Weise kann eine Mode auch ohne das Vorhandensein fester Wände auf einen Teil eines Sterns (englisch „cavity“, zwischen dem unteren Umlenkpunkt und dem photosphärischen Maximum der akustischen Grenzfrequenz) beschränkt sein.

Schwerewellen (g^+-Moden) sind in Gebieten konvektiver Stabilität propagierend, in instabilen Schichten evaneszent. Es kann vorkommen, daß sie nur in der Region zwischen zwei Konvektionszonen räumliche Oszillationen mit nennenswerter Amplitude zeigen und in den instabilen Gebieten abklingen. Sie sind dann zwischen diesen Schichten gefangen, und man spricht von „mode trapping“. Andererseits kann eine Schwerewelle eine konvektiv instabile Region aber noch durchdringen und außerhalb dieses Gebietes wieder räumliche Oszillationen mit endlicher Amplitude zeigen („tunneling“).

g^--Moden verhalten sich gerade umgekehrt. Sie sind in Gebieten konvektiver Instabilität propagierend, in stabilen Schichten evaneszent. Die lineare adiabatische Theorie zeigt (Formel (4.70)), daß Moden mit kleiner horizontaler Ausdehnung (großem k) und großer vertikaler Ausdehnung (kleinem k_z) die größten Anwachsraten zeigen. Daher kann man erwarten, daß Konvektion bevorzugt schmale tiefreichende Strukturen bildet, die innerhalb der instabilen Schicht eine große Geschwindigkeitsamplitude besitzen, die in den stabilen Regionen, in denen g^--Moden evaneszent sind, exponentiell abklingt (siehe die beiden Arbeiten von Böhm von 1963). Wie sich Strahlungstransport, Nichtlinearität und Turbulenz auswirken, wird sich dann in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen zeigen.

Mehr oder weniger regelmäßige Helligkeitsschwankungen bei Sternen sind seit langem bekannt. Und mit verbesserten Beobachtungsinstrumenten, Detektoren und Analysemethoden sinkt die Nachweisgrenze für diese Fluktuationen, und die Zahl der Sterne, bei denen man Oszillationen findet, steigt ständig an.

Alle Sterne können schwingen. Damit die Pulsationen aber tatsächlich auftreten, muß es einen Mechanismus geben, der sie anregt, der sie also mit Energie versorgt, um Verluste durch Strahlungsdämpfung, viskose (turbulente) Effekte oder durch Abgabe von mechanischer Energie nach außen auszugleichen. Pulsierende und nichtpulsierende Sterne unterscheiden sich also dadurch, daß in den ersteren ein Anregungsmechanismus existiert, der in der Lage ist, Moden bis zu einer Amplitude anzuregen, so daß die Größe der damit verbundenen Helligkeitsschwankungen oberhalb der Nachweisgrenze liegt.

Ein großer Teil der variablen Sterne findet sich innerhalb des klassischen *Instabilitätsstreifens* (siehe z.B. Cox 1980): Hier liegen u.a. die Cepheiden mit einer typischen Periode von einer Woche, die RR Lyrae-Sterne mit einer charakteristischen Periode von einem halben Tag, die δ Scuti-Sterne, die Schwingungsdauern von etwa einer Stunde zeigen, und nahe der Hauptreihe die schnell veränderlichen Ap-Sterne mit typischen Perioden von einigen Minuten. Die Cepheiden zeigen große Helligkeitsschwankungen, und es werden nur ein oder zwei Moden angeregt. Mit abnehmender Periode sinkt die Amplitude der Helligkeitsfluktuationen, aber es sind mehr Moden nachweisbar. Es handelt sich um p-Moden, und die Anregungsenergie liefert das Strahlungsfeld der Sterne, dem über den κ-Mechanismus (siehe Cox 1980) Energie entzogen wird.

Auf der Sonne entdeckten Leighton, Noyes und Simon 1962 vertikale Geschwindigkeitsfelder mit hoher zeitlicher Korrelation und einer Periode von etwa 5 Minuten. Sie konnten in der Folge als die äußersten evaneszenten Ausläufer stehender akustische Wellen, also p-Moden, die in einem resonanten Hohlraum im obersten Teil der Konvektionszone unterhalb der Photosphäre gefangen sind, identifiziert werden (Ulrich 1970, Leibacher und Stein 1971). Im Gegensatz zu den Sternen des klassischen Instabilitätsstreifens findet man in der Sonne die Eigenfrequenzen sehr vieler Moden, die jedoch alle eine sehr kleine Amplitude besitzen. Das deutet darauf hin, daß ihre Amplitude noch nicht durch nichtlineare Effekte begrenzt wird wie in den Sternen im Instabilitätsstreifen, die ihre Pulsationsanregungsenergie aus dem κ-Effekt beziehen. Also wird auch der Anregungsmechanismus in der Sonne ein anderer sein. In Frage kommt die stochastische Anregung durch Konvektion, d.h. turbulente konvektive Strömungen senden Schallwellen aus, die den in dem resonanten Hohlraum unterhalb der solaren Photosphäre gefangenen stehenden Wellen ständig Nachschub liefern. Obwohl der genaue Anregungsmechanismus der solaren p-Moden noch nicht eindeutig geklärt ist, hat die Analyse der Eigenfrequenzen enorme Fortschritte gemacht, und mit ihrer Hilfe schafft es die *Helioseismologie*, genaue Aussagen über den inneren Aufbau der Sonne zu treffen: So bestimmen Christensen-Dalsgaard, Gough und Thompson (1991) die Tiefe der solaren Konvektionszone zu $0.287 \pm 0.003\,\mathrm{R}_\odot$. Guzik und Cox (1993) reklamieren sogar eine noch höhere Genauigkeit mit ihrer Messung von $0.288 \pm 0.001\,\mathrm{R}_\odot$. Monteiro, Christensen-Dalsgaard und Thompson (1994) wagen mit Hilfe der Helioseismologie detaillierte Aussagen über das Overshoot-Gebiet am unteren Rand der Konvektionszone.

Unter den Weißen Zwergen gibt es drei streng gegeneinander abgegrenzte Gruppen von Pulsatoren (siehe Winget 1993): die DOVs oder PG1159-Sterne mit Effektivtemperaturen um 140 000 K, die heliumreichen DBVs bei circa 20 000 K und die wasserstoffreichen DAVs oder ZZ Ceti-Sterne um 12 000 K. Die Perioden liegen bei einigen 100 Sekunden, und die Amplituden der Helligkeitsschwankungen reichen von einigen Prozent bis hinab an die Nachweisgrenze. Bei den Schwingungen handelt es sich um Schwerewellen und nicht um Schallwellen wie bei den Sternen im Cepheiden-Instabilitätsstreifen.

4.4 LAWE und Strahlung

Die Wellengleichung (4.26) wurde unter der Annahme hergeleitet, daß der Einfluß des Strahlungsaustausches auf die Energiebilanz einer Mode vernachlässigt werden kann, daß also alle Bewegungen adiabatisch verlaufen. Wie man aus den Abbildungen 9 und 10 erkennt, ist die Strahlungsrelaxationszeit t_{rad} aber vergleichbar mit der Schallaufzeit t_{ac} und der Brunt-Väisälä-Zeitskala t_{BV}. Besonders in den Gebieten um $z = 0\,\mathrm{km}$, in denen t_{rad} die kürzeste der drei Zeitskalen ist, ist der Einfluß der Strahlung also wichtig.

Grundsätzlich ließe er sich mit berücksichtigen, indem man zusätzlich zu den Hydrodynamikgleichungen noch die Strahlungstransportgleichung in die Linearisierung mit einbezieht. Dann erhält man kein Differentialgleichungssystem mehr wie in (4.26) sondern wegen der Nichtlokalität des Strahlungstransports ein Integro-Differentialgleichungssystem. Die hiermit verbundenen Schwierigkeiten erspart man sich normalerweise durch die Anwendung der Diffusions- oder der Eddington-Näherung für die Behandlung des Strahlungstransports, die zwar in den optisch dünnen Schichten nicht exakt gültig sind, aber das Problem wenigstens handhabbar machen und wieder auf ein Differentialgleichungssystem (wenn auch höherer Ordnung) führen.

Aber es gibt noch ein weiteres bislang prinzipiell ungelöstes Problem: Die zu untersuchenden Sternhüllen befinden sich nicht im hydrostatischen Strahlungsgleichgewicht, denn ein Teil der Energie wird ja durch Konvektion transportiert. Das heißt aber, daß z.B. Temperaturfluktuationen in einer Mode, die Schwankungen im Strahlungstransport verursachen, auch zu Schwankungen im konvektiven Energiefluß führen können. Man müßte also nicht nur die Strahlungstransportgleichungen sondern auch die Gleichungen, die den Energietransport durch Konvektion beschreiben, linearisieren. Diese Gleichungen sind aber bislang unbekannt, wenn man von der extrem groben Näherung der Mischungswegtheorie absieht, die ja keine dynamischen Gleichungen liefert, die etwas über eine zeitliche Entwicklung aussagen könnten. Umgangen wird das Problem normalerweise, indem man man den konvektiven Fluß „einfriert", d.h. man ignoriert seine Schwankungen während einer Oszillationsperiode. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung einer zeitabhängigen nichtlokalen Konvektionstheorie (Xiong 1991), die aber keineswegs als gesichert, allgemein akzeptiert oder wenigstens allgemein verwendet angesehen werden kann.

Bisher ist das vollständige linearisierte Gleichungssystem also noch nicht einmal aufgestellt, geschweige denn analysiert worden. Es existieren jedoch zahlreiche Versuche, Teilaspekte zu untersuchen und immer mehr und mehr Effekte des Strahlungsfeldes in den Analysen zu berücksichtigen (siehe die Gegenüberstellung zahlreicher Arbeiten in Mihalas & Mihalas 1984 oder die neueren Arbeiten von Dzhalilov, Zhugzhda und Staude 1992 und 1994). Um den Einfluß des Strahlungsaustausches wenigstens annähernd abschätzen zu können, verwende ich eine Näherung, die von Souffrin (1972) oder Bünte und Bogdan (1994) benutzt wird und die die Ordnung und die Struktur des Gleichungssystems (4.38) nicht beeinflußt.

Dahinter steckt die Idee, daß man in Gleichung (4.17) den Einfluß des Strahlungsterms berücksichtigen kann, indem man statt des 1. Adiabatenkoeffizienten Γ_1 ein effektives $\Gamma_{1,\mathrm{eff}}$ einführt, das von Γ_1 und weiteren Größen abhängen darf. Bünte und Bogdan (1994) finden, daß man für eine geschichtete isotherme Atmosphäre die Strahlungsdämpfung exakt berücksichtigen kann, wenn man voraussetzt, daß sie sich als Newtonsche Kühlung beschreiben läßt und definiert

$$\Gamma_{1,\mathrm{eff}} = \lambda\Gamma_1 + (1-\lambda)1 \tag{4.73}$$

mit

$$\lambda = \frac{-i\omega t_{\mathrm{rad}}}{1-i\omega t_{\mathrm{rad}}} \ . \tag{4.74}$$

Interpoliert wird also zwischen dem isothermen Adiabatenkoeffizienten, nämlich 1, und dem adiabatischen Γ_1 mit einem komplexen Parameter, der von der Frequenz ω der Schwingung und der radiativen Zeitskala t_{rad} abhängt. Das führt dazu, daß $\Gamma_{1,\mathrm{eff}}$ ebenfalls komplex wird und die resultierenden Moden zeitlich abklingen, also auch ein komplexes ω besitzen. Bünte und Bogdan (1994) verwenden zur Berechnung des effektiven Adiabatenkoeffizienten die Schwingungsfrequenz ω. Demgegenüber benutzt Souffrin (1972) die akustische Cutoff-Frequenz ω_{ac} als charakteristische Frequenz.

Das aus Gl. (4.73) erhaltene effektive Γ_1 ist zur Modellierung des dämpfenden Einflusses der Strahlung auf Schallwellen gedacht. Um die Überlegung auf Schwerewellen zu übertragen, schränke ich das lokale Modell aus Abschnitt 3.7 auf den Fall verschwindender Viskosität, $t_{\mathrm{vis}} \to \infty$, und einer sehr schmalen Box, $a \to 0$, ein. Dann reduziert sich Gl. (3.89) auf

$$\Omega_+ = -\frac{1}{2}\frac{1}{t_{\mathrm{rad}}} + \sqrt{\frac{1}{t_{\mathrm{BV}}^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{t_{\mathrm{rad}}^2}} \ . \tag{4.75}$$

Um hieraus eine Formel für $\Gamma_{1,\mathrm{eff}}$ zu gewinnen, schreibe ich

$$\frac{1}{t_{\mathrm{BV}}^2} = -\omega_{\mathrm{BV}}^2 = -g\left(\frac{1}{H_\rho} - \frac{1}{\Gamma_1 H_p}\right) \tag{4.76}$$

und setze

$$\Omega_+^2 = -g\left(\frac{1}{H_\rho} - \frac{1}{\Gamma_{1,\mathrm{eff}} H_p}\right) \ . \tag{4.77}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\Gamma_{1,\mathrm{eff}}} = \lambda \frac{1}{\Gamma_1} + (1-\lambda)\,\frac{H_p}{H_\rho} \tag{4.78}$$

mit

$$\lambda = \left(-\frac{t_{\mathrm{BV}}}{2t_{\mathrm{rad}}} + \sqrt{\frac{t_{\mathrm{BV}}^2}{4t_{\mathrm{rad}}^2} + 1} \right)^2 \quad . \tag{4.79}$$

Hier wird der effektive Adiabatenkoeffizient also zwischen dem adiabatischen Wert Γ_1 und dem „Adiabatenkoeffizient der Schichtung“ H_ρ/H_p interpoliert. Leider kann die Dichteskalenhöhe und damit auch $\Gamma_{1,\mathrm{eff}}$ unendlich oder auch negativ werden. Das läßt sich aber nicht verhindern, denn nur so ist es möglich, daß die Wachstumsrate für g^--Moden für kurze Strahlungsrelaxationszeitskalen gegen Null geht.

Diese grobe Berücksichtigung des Strahlungstransports liefert nur qualitative Ergebnisse.

4.5 Numerisches Verfahren zur Lösung der LAWE

Zur numerischen Lösung des Randwertproblems, das aus der Wellengleichung (4.38) und einem geeigneten Paar von Randbedingungen besteht, benutze ich ein einfaches Schießverfahren.

Eine vorgegebene eindimensionale Hintergrundschichtung (Temperatur- und Druckwerte z.B. aus einem grauen hydrostatischen, einem Mischungswegs- oder einem Strahlungs-Hydrodynamik-Modell) wird zunächst auf ein feines Gitter mit konstanter Schrittweite interpoliert. Auf diesem Gitter werden dann die notwendigen thermodynamischen Größen wie ρ, Γ_1, c_s usw. berechnet. Dabei können die oben beschriebenen Modifikationen von Γ_1 berücksichtigt werden. Die horizontale Wellenzahl k wird für einen Rechenlauf festgehalten. Für eine vorgegebene Menge von Frequenzen ω werden sodann „Testschüsse“ abgegeben, d.h. ausgehend von einem Wertepaar, $\hat{v}$ und $\widehat{\nabla \vec{v}}$, das die untere Randbedingung erfüllt, wird das Differentialgleichungssystem (4.38) mit einem Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen integriert. Die Werte für $\hat{v}$ und $\widehat{\nabla \vec{v}}$ ergeben, eingesetzt in die obere Randbedingung, i.a. nicht 0. Der Betrag der Abweichung wird erst einmal abgespeichert und später nach lokalen Minima durchsucht. In der Nähe jedes dieser Minima wird der Betrag der Abweichung dann mit dem Broyden-Verfahren (Kosmol 1989) durch Variation von ω und wiederholte Integration iterativ minimiert. Die Kreisfrequenz ω kann wegen der oberen offenen Randbedingung oder der Verwendung von $\Gamma_{1,\mathrm{eff}}$ komplex werden, so daß die Minimierung in zwei Dimensionen (Real- und Imaginärteil von ω) stattfinden muß.

Zuerst sollte das Programm nur zur Identifikation planparalleler Oszillationen ($k = 0$) in A-Stern-Modellen dienen. Die Berechnung dieser p-Moden stellt nur geringe Anforderungen an die Numerik. Später wurde das Programm dann auf den nicht-planparallelen Fall ($k \neq 0$) erweitert, um die in kühleren Hauptreihen-Modellen durch die Konvektion erzeugten Schallwellen zu untersuchen. Um die obere offene Randbedingung zu berücksichtigen, wurde ein komplexes ω erlaubt. Die in nicht-planparalleler Geometrie möglichen g-Moden zeigen stellenweise große räumliche Anwachs- oder Abklingraten, und die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems (4.38) variieren stärker, was höhere Anforderungen an die Numerik zur Folge hat.

Die Wellengleichung (4.38) ist eine lineares Differentialgleichungssystem, bestehend aus zwei Gleichungen 1. Ordnung. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix können sehr unterschiedlich sein. Dann liegt der Fall einer steifen Differentialgleichung (Stoer und

Bulirsch 1978) vor. Um die dadurch eventuell auftretenden Stabilitätsprobleme zu umgehen, integriere ich das System, indem ich annehme, daß die Koeffizienten stückweise konstant sind, und berechne die exakte Lösung auf jedem dieser Intervalle:

Dazu werden die Koeffizienten der Matrix über ein Intervall gemittelt. Ein Eigenwert dieser gemittelten Matrix mit zugehörigem Eigenvektor wird bestimmt und zur Konstruktion einer unitären Transformationsmatrix benutzt, die die Koeffizientenmatrix in obere Dreiecksgestalt überführt (d.h. links unten steht eine Null) und mit der ebenfalls der Vektor $(\widehat{\nabla\vec{v}}, \hat{v})$ transformiert wird. Die Lösung dieses vereinfachten Systems läßt sich analytisch ermitteln, indem man erst die zweite Zeile und mit diesem Teilergebnis dann die erste Zeile integriert. Der Ergebnisvektor wird mit Hilfe der unitären Matrix rücktransformiert. Man erhält $(\widehat{\nabla\vec{v}}, \hat{v})$ am nächsten Gitterpunkt und kann mit der Integration im nächsten Intervall fortfahren.

Die Methode ist exakt für konstante Koeffizienten, wie sie z.B. in einer isothermen Atmosphäre vorkommen. Besitzt die Koeffizientenmatrix Diagonalgestalt, hängt die Genauigkeit der Methode nur von der Genauigkeit der Berechnung der mittleren Koeffizienten ab. Auch für hohe Wellenzahlen bleibt die Genauigkeit der Methode erhalten. Sie leidet jedoch, wenn die Koeffizienten zu stark variieren.

5 Mischungswegtheorie

5.1 Geschichte der Mischungswegtheorie

Biermann (1977) beginnt seine „Historical Reminiscences of the Origins of Stellar Convection Theory“ mit einem schönen Zitat von Eddington (1926): „We shall not enter further into the historic problem of convective equilibrium since modern researches show that the hypothesis is untenable. In stellar conditions the main process of transfer of heat is by radiation and other modes of transfer may be neglected.“

Noch modernere Untersuchungen als die, von denen Eddington spricht, haben allerdings ergeben, daß Konvektion sehr wohl einen wesentlichen Beitrag zum Energietransport in einem Stern leisten und daher keineswegs vernachlässigt werden kann.

Ignoriert man bei der Integration eines Sonnenmodells von den bekannten Oberflächenwerten nach innen die Konvektion und insbesondere ihre Fähigkeit, den Temperaturgradienten abzuflachen, so führt der nun zu steile Temperaturgradient zu einer Überschätzung der Druckskalenhöhe in den konvektiv instabilen Schichten. Es folgt dann eine zu hohe Zentraltemperatur bei zu geringem Zentraldruck und folglich eine falsche Energieproduktionsrate durch Kernfusion. So ergeben sich Widersprüche zu bekannten Werten von Masse und Leuchtkraft der Sonne.

Schon 1906 hatte Schwarzschild das später nach ihm benannte Kriterium (3.71) formuliert, das besagt, daß eine Sternatmosphäre instabil wird und sich nicht mehr in einem statischen Gleichgewicht befinden kann, falls der radiative Temperaturgradient den adiabatischen übersteigt. Es war allerdings in ähnlicher Form in der Meteorologie schon länger bekannt.

Konvektionszonen durch die teilweise Ionisation von Wasserstoff und Helium wurden zuerst von Unsöld (1930) untersucht. Er macht die Konvektion für das Auftreten von Granulation verantwortlich und schätzt, daß die konvektive Geschwindigkeit ein „nicht zu kleiner Bruchteil der Schallgeschwindigkeit“ sein dürfte. Andererseits unterschätzt er aber die Tiefe der Konvektionszone mit „einigen 100 km“ ganz gewaltig, was aber zum großen Teil an den damals noch unzureichend bekannten Opazitäten liegt.

Das Sonnenmodell von de Jager (1948) folgt von der Instabilitätsgrenze an einer Adiabaten, d.h. Strahlungsaustausch zwischen konvektiven Elementen wird noch nicht berücksichtigt, und es wird eine maximale Effizienz der Konvektion angenommen. Allerdings hatte Biermann schon 1942 festgestellt, daß der konvektive Energietransport in der Nähe der Oberfläche nicht ganz ausreicht, so daß der wirkliche Temperaturgradient zwischen dem adiabatischen und dem radiativen liegen muß.

Es muß also eine bessere Theorie gefunden werden, die in der Lage ist, gegebenenfalls zwischen dem adiabatischen und dem radiativen Temperaturgradienten zu interpolieren. Zwischen 1915 und 1930 haben Taylor, Schmidt und Prandtl das Mischungswegkonzept (siehe Prandtl 1965) in Anlehnung an die kinetische Gastheorie entwickelt. In einem Gas bewegen sich danach die Moleküle zwischen zwei Stößen ohne Wechselwirkung mit den anderen Molekülen eine mittlere freie Weglänge weit, so daß in dieser Zeit äußere Felder zu einer Beschleunigung der Teilchen führen können. Bei einem Stoß wird die überschüssige Bewegungsenergie komplett an die anderen Moleküle abgegeben. Den Molekülen in der kinetischen Gastheorie entsprechen in der *Mischungswegtheorie* (englisch „mixing length theory“, kurz MLT) die Flüssigkeitselemente, die in einer konvektiv instabilen Schicht durch Auftriebskräfte beschleunigt werden, einen Mischungsweg zurücklegen und sich wieder auflösen, wobei sie ihre kinetische Energie als thermische Energie an die Umgebung abgeben. 1933 hat Biermann diese Ideen auf Konvektionszonen im Sterninneren angewandt und gezeigt, daß der Temperaturgradient in Kernkonvektionszonen praktisch adiabatisch ist.

Die klassische Ableitung und Formulierung der Mischungswegtheorie einschließlich der Abschätzung des Temperaturausgleichs durch Strahlungstransport in der heute gebräuchlichen Form findet man in Vitense (1953) „Die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne“ und Böhm-Vitense (1958) „Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte“.

Etwas modernere Herleitungen und Darstellungen der Mischungswegtheorie findet man z.B. in den Lehrbüchern von Cox & Giuli (1968), Stix (1989), der auch auf das Problem des Overshoot unterhalb einer Konvektionszone eingeht, Kippenhahn & Weigert (1991) oder Böhm-Vitense (1992).

Xiong (1991) zeigt, daß sich die lokale Mischungswegtheorie auch in eine zeitabhängige und nichtlokale Form bringen läßt, aber es wird auch erkennbar, daß diese Gleichungen viel von der Übersichtlichkeit der Standardtheorie verlieren und daß mit der zunehmenden Komplexität auch die numerischen Probleme bei der Lösung der Gleichungen zunehmen.

Skaley & Stix (1991) schätzen mit Hilfe der nichtlokalen Erweiterung der Mischungswegtheorie von Shaviv & Salpeter (1973) den Einfluß der Overshoot-Zone am Boden der solaren Konvektionszone auf das Modenspektrum der Sonne und auf die Verringerung der Lithiumhäufigkeit durch Kernprozesse dicht unterhalb der Konvektionszone ab.

5.2 Grundannahmen der Mischungswegtheorie

Die Mischungswegtheorie beruht auf einem einfachen Bild der Konvektion. In Schichten, die nach dem *Schwarzschild-Kriterium* (3.71) gegen konvektive Störungen instabil sind, übernimmt die Konvektion einen Teil des gesamten Energieflusses, der außerhalb der instabilen Regionen ausschließlich von der Strahlung getragen wird. Der konvektive Energiefluß wird von auf- und absteigenden *Blasen* (oder Wirbeln oder Flüssigkeitselementen) getragen, die aus infinitesimalen Störungen aufgrund der Instabilität entstehen, wachsen, dabei aufsteigen bzw. absinken und sich nach einer typischen Strecke (dem Mischungsweg) ℓ schlagartig auflösen und ihre gewonnene Bewegungsenergie als thermische Energie an die Umgebung abgeben.

Es wird angenommen, daß sich ihre Eigenschaften wie Größe, Geschwindigkeit und Temperaturüberschuß ausschließlich aus *lokalen* Größen bestimmen lassen. Dazu ist u.a. notwendig, daß sich der Strahlungsfluß aus lokalen Parametern bestimmen läßt, was nur in optisch tiefen Schichten möglich ist, in denen die Diffusionsnäherung gültig ist. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß z.B. die horizontalen Temperaturfluktuationen ΔT so klein sind, daß alle Größen, die von ihnen abhängen (wie z.B. die Energie $c_p \Delta T$), in einer linearen Näherung berechnet werden können.

Die Blasen werden eine Ausdehnung in der Größenordnung der Druckskalenhöhe besitzen. Trotzdem sollen sie sich durch lokale mittlere Größen beschreiben lassen.

Horizontale Druckfluktuationen werden vernachlässigt. Es werden nur vertikale Geschwindigkeiten betrachtet, und die jeweils auf- bzw. abströmenden Gebiete werden als symmetrisch angenommen, d.h. auf- und absteigende Blasen nehmen den gleichen Flächenanteil ein, was dazu führt, daß kein Nettofluß von kinetischer Energie auftritt.

Die Annahme der Lokalität läßt sich nur aufgeben, wenn man bereit ist, erhebliche Komplikationen in Kauf zu nehmen (siehe z.B. Xiong 1991). Und es existiert bis jetzt keine allgemein akzeptierte oder verwendete nichtlokale Konvektionstheorie. Andere Annahmen — wie die über die Länge des Mischungsweges oder die Geometrie der Blasen — lassen sich fast beliebig modifizieren, so daß eine Vielzahl von zwar eng verwandten aber doch nicht identischen Mischungswegtheorien entstanden ist.

5.3 Herleitung der lokalen Mischungswegtheorie

5.3.1 Die 4 Temperaturgradienten

Der *adiabatische Temperaturgradient* läßt sich bei gegebener Temperatur und bekanntem Druck mit Hilfe der Zustandsgleichung berechnen (siehe Gleichung (2.64)):

$$\nabla_{\mathrm{ad}} = \left.\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right|_s \quad . \tag{5.1}$$

Er gibt an, welche Temperaturänderung ein Flüssigkeitselement erfährt, das sich im Druckgleichgewicht mit der Umgebung adiabatisch, also ohne Energieaustausch, bewegt. Die Mischungswegtheorie benutzt als lokale Theorie für den Strahlungstransport die Diffusionsnäherung, nach der sich aus dem *lokalen Temperaturgradienten*

$$\nabla = \frac{d\ln T}{d\ln P} = \frac{\frac{d\ln T}{dz}}{\frac{d\ln P}{dz}} \tag{5.2}$$

der Strahlungsfluß

$$\boxed{F_{\mathrm{rad}} = \frac{16\sigma}{3}\frac{T^4}{\kappa\rho H_p}\nabla} \quad . \tag{5.3}$$

berechnen läßt, welcher allerdings innerhalb einer Konvektionszone nicht von vornherein bekannt ist. Der *radiative Temperaturgradient* ist derjenige, der nötig ist, um den gesamten Energiefluß

$$\sigma T_{\mathrm{eff}}^4 = F_{\mathrm{rad}} + F_{\mathrm{con}} \tag{5.4}$$

des Sterns durch Strahlung zu transportieren (in Diffusionsnäherung):

$$\boxed{F_{\mathrm{rad}} + F_{\mathrm{con}} = \frac{16\sigma}{3}\frac{T^4}{\kappa\rho H_p}\nabla_{\mathrm{rad}}} \quad . \tag{5.5}$$

Auch er ist bei vorgegebener Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung, Opazität, Temperatur und Druck leicht zu ermitteln. Zusätzlich definiert man noch den *Temperaturgradienten eines konvektiven Elements*

$$\nabla_{\mathrm{el}} \quad , \tag{5.6}$$

der später abgeschätzt wird. Eine radiative Schichtung wird gegen konvektive Störungen nach dem Schwarzschild-Kriterium instabil, falls $\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla_{\mathrm{ad}}$. Der tatsächliche Temperaturgradient in einer entwickelten Konvektionszone ∇ wird zwischen beiden liegen: $\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla > \nabla_{\mathrm{ad}}$. Der Gradient ∇_{el} eines konvektiven Elements wird nicht adiabatisch sein, sondern sich durch Strahlungsaustausch dem Temperaturgradienten der Umgebung annähern. Also ergibt sich

$$\boxed{\nabla_{\mathrm{rad}} > \nabla > \nabla_{\mathrm{el}} > \nabla_{\mathrm{ad}}} \quad . \tag{5.7}$$

5.3.2 Konvektiver Fluß, konvektive Geschwindigkeit

Im folgenden soll eine Abschätzung für den konvektiven Fluß

$$F_{\mathrm{con}} = \rho v c_p \Delta T \tag{5.8}$$

gewonnen werden. In (5.8) sind ρ und c_p bei gegebener Hintergrundschichtung bekannt. Aber v und ΔT müssen noch berechnet werden. Der Temperaturüberschuß ΔT, den ein konvektives Element angesammelt hat, kann als Integral über seinen bisher zurückgelegten Weg $s = \frac{\ell}{2}$ geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Delta T &= \int_{-\frac{\ell}{2}}^{0} \left[\frac{dT}{dz} - \left.\frac{dT}{dz}\right|_{\mathrm{el}} \right] ds && (5.9) \\ &\approx \left[\frac{dT}{dz} - \left.\frac{dT}{dz}\right|_{\mathrm{el}} \right] \frac{\ell}{2} && (5.10) \\ &= T \left[\nabla - \nabla_{\mathrm{el}} \right] \frac{1}{H_p} \frac{\ell}{2} \ . && (5.11) \end{aligned}$$

Ein Ausdruck für die Geschwindigkeit v einer Blase soll durch Betrachtung der Beschleunigungen, die während ihrer Lebensdauer auf sie eingewirkt haben, gewonnen werden. Die momentane Auftriebskraft (pro Einheitsmasse) als Funktion der Dichtefluktuation $\Delta\rho$ ist

$$f_{\mathrm{buo}} = -g \frac{\Delta\rho}{\rho} \ . \tag{5.12}$$

Bei horizontal konstantem Druck gilt

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\delta \frac{\Delta T}{T} \ . \tag{5.13}$$

Wenn die Hälfte der Auftriebskraft in kinetische Energie der Blase umgewandelt wird (Die andere Hälfte dient dazu, die umgebende Materie zur Seite zu drängen, bzw. wird durch Reibung vernichtet.), so ergibt sich mit den letzten drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v^2 &= \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{0} f_{\mathrm{buo}} ds && (5.14) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\ell/2}^{0} g\delta \frac{\Delta T}{T} ds && (5.15) \\ &\approx \frac{1}{2} \frac{1}{2} g\delta \left[\nabla - \nabla_{\mathrm{el}} \right] \frac{1}{H_p} \frac{\ell}{2} \frac{\ell}{2} \ , && (5.16) \end{aligned}$$

$$\boxed{v^2 = g\delta \left[\nabla - \nabla_{\mathrm{el}} \right] \frac{\ell^2}{8 H_p}} \ . \tag{5.17}$$

Setzt man diesen Ausdruck zusammen mit (5.11) in (5.8) ein, so ergibt sich für den konvektiven Fluß

$$\boxed{F_{\mathrm{con}} = \rho c_p T \sqrt{g\delta} \frac{\ell^2}{4\sqrt{2} H_p^{3/2}} \left[\nabla - \nabla_{\mathrm{el}} \right]^{3/2}} \ . \tag{5.18}$$

5.3.3 Strahlungsaustausch und Temperaturgradient

Jetzt muß noch ein Ausdruck für den Temperaturgradienten $\nabla_{\rm el}$ gefunden werden. Dazu betrachtet man den Energiefluß F durch die Oberfläche $S_{\rm el}$ einer Blase, die einen gewissen Temperaturüberschuß $T_{\rm el}-T$ gegenüber ihrer Umgebung besitzt. Im optisch dicken Fall gilt nach der *Diffusionsnäherung* für den Betrag des radiativen Energieflusses

$$F = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}\left|\frac{\partial T}{\partial n}\right| \approx \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}\frac{\Delta T}{d_{\rm el}} \ , \tag{5.19}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung senkrecht zur Oberfläche eines Elements und $d_{\rm el}$ eine typische Länge ist, auf der sich die Temperaturfluktuationen ausgleichen. Der gesamte Energiestrom durch die Oberfläche eines Elements ist dann $FS_{\rm el}$. Der Energieinhalt einer Blase mit dem Volumen $V_{\rm el}$ ist

$$E = \rho V_{\rm el} c_p \Delta T \ . \tag{5.20}$$

Damit ergibt sich als *thermische Einstellzeitskala* (entspricht Gl. 3.30)

$$t_{\rm el,cool} = \frac{E}{FS_{\rm el}} = \frac{c_p\rho}{\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}}\frac{V_{\rm el}d_{\rm el}}{S_{\rm el}} \ . \tag{5.21}$$

Die Temperaturänderung pro Zeiteinheit ist

$$\frac{FS_{\rm el}}{\rho V_{\rm el} c_p} \ ,$$

und die Temperaturänderung pro zurückgelegter Wegstrecke ist dann

$$\frac{FS_{\rm el}}{\rho V_{\rm el} c_p v} \ .$$

Die Temperatur einer Blase, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, wird sich einmal aufgrund der adiabatischen Expansion (oder Kompression) und dann aufgrund des Strahlungsaustausches mit der Umgebung verändern:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{\rm el} = \left.\frac{dT}{dr}\right|_{\rm ad} - \frac{FS_{\rm el}}{\rho V_{\rm el} c_p v} \ . \tag{5.22}$$

Ausgedrückt durch die logarithmischen Temperaturgradienten und mit Gleichung (5.19) ergibt sich

$$\nabla_{\rm el} - \nabla_{\rm ad} = \frac{16\sigma T^3 H_p \Delta T}{3\kappa\rho^2 c_p v T}\frac{S_{\rm el}}{V_{\rm el}d_{\rm el}} \ . \tag{5.23}$$

Jetzt muß eine Annahme über die Geometrie einer Blase gemacht werden. Hier folge ich Kippenhahn und Weigert (1991, Gleichung (7.10)), indem ich

$$\frac{S_{\rm el}}{V_{\rm el}d_{\rm el}} = \frac{9/2}{\ell^2} \tag{5.24}$$

setze. Mit Hilfe von (5.11) und (5.24) wird aus (5.23)

$$\boxed{\frac{\nabla_{\rm el} - \nabla_{\rm ad}}{\nabla - \nabla_{\rm el}} = \frac{24\sigma T^3}{\kappa\rho^2 c_p v\ell}} \ . \tag{5.25}$$

Die Herleitung dieser Formel beruht auf der Annahme der Gültigkeit der *Diffusionsnäherung*, die nur gewährleistet ist, wenn die konvektiven Elemente optisch dick sind ($\kappa\rho\ell \gg 1$). Um auch den Strahlungsaustausch optisch dünner Elemente korrekt wiederzugeben, kann man nach Mihalas (1970) die Gleichung um einen Faktor erweitern,

$$\frac{\nabla_{\rm el} - \nabla_{\rm ad}}{\nabla - \nabla_{\rm el}} = \frac{24\sigma T^3}{\kappa\rho^2 c_p v\ell}\frac{(\kappa\rho\ell)^2}{2+(\kappa\rho\ell)^2} \ , \tag{5.26}$$

wobei sich für $\kappa\rho\ell \gg 1$ die alte Formel ergibt.

5.3.4 Die kubische Gleichung

Bei vorgegebenem T, P, g, $T_{\rm eff}$ und ℓ lassen sich ρ, c_p, δ, $\nabla_{\rm ad}$, $\nabla_{\rm rad}$ und κ mit Hilfe von Zustandsgleichung, Opazitätstabelle usw. leicht berechnen. Aus dem System der Gleichungen (5.3, 5.5, 5.17, 5.18, 5.25) folgen dann $F_{\rm rad}$, $F_{\rm con}$, v, $\nabla_{\rm el}$ und ∇. Diese fünf Gleichungen sollen nun auf eine reduziert werden. Dazu werden zuerst zwei dimensionslose Größen (siehe Kippenhahn und Weigert, 1991, Gleichungen (7.12,13))

$$U := \frac{12\sigma T^3}{c_p\rho^2\kappa\ell^2}\sqrt{\frac{8H_p}{g\delta}}\ , \tag{5.27}$$

$$W := \nabla_{\rm rad} - \nabla_{\rm ad} \tag{5.28}$$

definiert. Mit Gleichung (5.17) wird v in (5.25) eliminiert:

$$\nabla_{\rm el} - \nabla_{\rm ad} = 2U\sqrt{\nabla - \nabla_{\rm el}}\ . \tag{5.29}$$

Setzt man Gleichung (5.3) für den radiativen Fluß und Gleichung (5.18) für den konvektiven Fluß in die Gleichung (5.5) für den gesamten Fluß ein, so ergibt sich

$$(\nabla - \nabla_{\rm el})^{3/2} = \frac{8}{9}U(\nabla_{\rm rad} - \nabla)\ . \tag{5.30}$$

Ich definiere

$$\xi := \sqrt{\nabla - \nabla_{\rm ad} + U^2} \tag{5.31}$$

und schreibe (5.29) als

$$\nabla - \nabla_{\rm ad} - \sqrt{\nabla - \nabla_{\rm el}}^{\,2} - 2U\sqrt{\nabla - \nabla_{\rm el}} = 0\ . \tag{5.32}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\sqrt{\nabla - \nabla_{\rm el}}$ mit der einzigen sinnvollen Lösung (, da $\sqrt{\nabla - \nabla_{\rm el}} \geq 0$)

$$\sqrt{\nabla - \nabla_{\rm el}} = -U + \xi\ . \tag{5.33}$$

Mit diesem Ausdruck wird nun $\nabla - \nabla_{\rm el}$ auf der linken Seite und mit Gleichung (5.31) wird ∇ auf der rechten Seite von (5.30) ersetzt, und man erhält die bekannte kubische Gleichung für ξ

$$\boxed{(\xi - U)^3 + \frac{8U}{9}(\xi^2 - U^2 - W) = 0}\ . \tag{5.34}$$

Sie besitzt nur eine reelle Lösung, aus der sich mit (5.31) der Temperaturgradient ∇, dann mit (5.33) $\nabla_{\rm el}$ und schließlich mit den Formeln (5.3, 5.17 und 5.18) die Größen $F_{\rm rad}$, v und $F_{\rm con}$ berechnen lassen.

5.3.5 Wahl des Mischungsweges

Um den konvektiven Fluß mit Hilfe der Mischungswegtheorie berechnen zu können, muß noch die Größe des Mischungswegs bestimmt werden. Dafür gibt es aber keine zwingende Herleitung, und man ist auf mehr oder weniger willkürliche Annahmen angewiesen. So wurde zur Festlegung des Mischungsweges vorgeschlagen, eine wichtige charakteristische Länge zu nehmen: den Abstand zum Sternzentrum, den Abstand zum unteren/oberen/nächsten Rand der Konvektionszone, den beobachteten mittlere Granulendurchmesser und Skalenhöhen von Temperatur, Dichte oder Druck (Stix 1989).

Für die Dichteskalenhöhe H_ρ spricht folgendes Argument: Ein konvektives Element, das sich um eine Dichteskalenhöhe nach oben bewegt, dehnt sich um einen Faktor e aus. Das widerspricht natürlich der Annahme, daß auf- und absteigende Elemente gleiche Raumanteile einnehmen. Ein Teil der nach oben strömenden Materie muß also seitlich in Gebiete mit abwärts fließender Materie gedrängt werden. Nach etwa einer Dichteskalenhöhe wird ein konvektives Element also seine Identität allein schon aus Gründen der Massenerhaltung verlieren, so daß sich H_ρ als Mischungsweg anbietet. Leider variiert die Dichte aber nicht notwendigerweise monoton mit der Tiefe, so daß die lokale Dichteskalenhöhe auch unendlich werden kann und sich dann zumindestens in diesen Schichten nicht als typische Länge eignet.

In ihrer Arbeit von 1953, in der der Mischungswegformalismus so vorgestellt wird, wie er heute noch meist verwendet wird, verweist Vitense für eine genaue Festlegung des Mischungsweges auf eine noch zu entwickelnde Turbulenztheorie kompressibler Medien. In Ermangelung einer solchen wählt sie die Druckskalenhöhe zur Berechnung des Mischungswegs und setzt

$$\boxed{\ell = \alpha H_p} \quad . \tag{5.35}$$

Hier ist α ein freier Parameter, der sogenannte *Mischungswegparameter*, der die Größenordnung 1 besitzt. In ihrer Arbeit hat Vitense Modelle für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ gerechnet.

Als Argument für diese Wahl des Mischungswegparameters führt Stix (1989) die Arbeit von Chan und Sofia (1987) an, in der die beiden Autoren finden, daß in ihren dreidimensionalen idealisierten Konvektionsrechnungen die vertikale Korrelationslänge des Geschwindigkeitsfeldes proportional zur Druckskalenhöhe (und nicht zur Dichteskalenhöhe) ist.

Auch in meiner Arbeit werde ich die Übereinstimmung von Mischungswegvoraussagen und den Ergebnissen der Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen untersuchen und versuchen, einen Mischungswegparameter zu bestimmen. Leider zeigt es sich, daß sich das Mischungsweg- und das hydrodynamische Bild der Konvektion in den untersuchten Sternen in vielen Punkten (insbesondere was die Frage des Overshoot angeht) extrem unterscheiden. Das führt dazu, daß je nach Kriterium, das man für den Vergleich heranzieht (z.B. maximaler konvektiver Fluß, konvektive Geschwindigkeit, Ausdehnung der Konvektionszone ...), *verschiedene* Mischungswegparameter eine beste Übereinstimmung zu dem *gleichen* Strahlungs-Hydrodynamik-Modell ergeben. D.h. α ist keine noch zu bestimmende Naturkonstante, sondern ein reiner Fit-Parameter, den man entsprechend modifizieren kann und muß, um jeweils einen Teilaspekt realistischer Konvektion optimal darzustellen, was je nach Aspekt mehr oder weniger gut gelingt.

5.4 Mischungswegmodelle

Die in dieser Arbeit von mir berechneten Mischungswegmodelle wurden mit Hilfe des ATLAS6-Programms von Kurucz (1979) berechnet, das von Ludwig (1992) modifiziert wurde, so daß genau die gleichen Opazitätstabellen wie für die Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen verwendet werden können.

5.5 Overshoot im Mischungswegbild

Das Bild, das die lokale Mischungswegtheorie von konvektiven Strömungen zu zeichnen versucht, ist insbesondere in der Nähe der Grenzen einer Konvektionszone problematisch: Eine Blase, die weniger als einen Mischungsweg vom Rand entfernt entsteht und sich auf diesen zu bewegt, darf nicht den gesamten Mischungsweg zurücklegen, bis sie sich auflöst, sondern muß rechtzeitig vor dem Erreichen der Stabilitätsgrenze abgebremst werden. Dafür gibt es aber keinen physikalischen Grund, und man wird eher vermuten, daß eine Blase, die in der Konvektionszone beschleunigt wurde, über die Stabilitätsgrenze hinausschießt (das sogenannte „Overshooting") und im stabilen Gebiet allmählich an Geschwindigkeit verliert.

Stix (1989) versucht, dies zu berücksichtigen und die lokale Mischungswegtheorie durch einen nichtlokalen Formalismus (siehe Shaviv und Salpeter 1973) zu erweitern, indem er für den oberen Rand und den Großteil der (solaren) Konvektionszone die lokale Mischungswegtheorie verwendet, aber in der Nähe des unteren Randes im wesentlichen die mit lokalen Größen arbeitenden Gleichungen (5.17) und (5.11) durch Integrale ähnlich (5.15) und (5.9) ersetzt. Auf diese Weise schätzt er ab, daß Overshoot die solare Konvektionszone von 181000 km auf 197000 km vertieft und daß die Overshootzone einen beträchtlichen Bruchteil einer Druckskalenhöhe betragen kann. Leider weisen ∇, ΔT und $F_{\rm rad}$ beim Übergang zwischen Overshootzone und dem radiativen Inneren der Sonne Diskontinuitäten auf, die sicherlich keinen physikalischen Ursprung besitzen.

Schon Böhm-Vitense (1958) bezeichnet die lokale Mischungswegtheorie als eine relativ grobe Näherung an eine Theorie der turbulenten Konvektion. Insbesondere ist das Bild, das die lokale als auch die oben skizzierte nicht-lokale Version von den Grenzen einer Konvektionszone zeichnet, extrem zweifelhaft, und es widerspricht der physikalischen Intuition. So schreibt Mihalas (1970): „We shall not dwell here upon the limitations of the mixing length theory since they are quite obvious in the derivation given above; it is clear that the theory is only an heuristic attempt to treat an otherwise unapproachable problem. A significant improvement in our understanding of the physical state of the atmospheres of late-type stars will necessarily be delayed until the theory of convection is better understood; therefore an improved theory is eagerly awaited by many astronomers."

6 Konvektionsströmungen in Hauptreihensternen und Weißen Zwergen

6.1 Sonne

Obwohl sich diese Untersuchung nicht auf Konvektion in der Sonne konzentriert, werde ich zu Anfang ein typisches Strömungsbild der obersten Schicht der solaren Konvektionszone vorstellen (Bild 14, Daten zur Verfügung gestellt von Matthias Steffen).

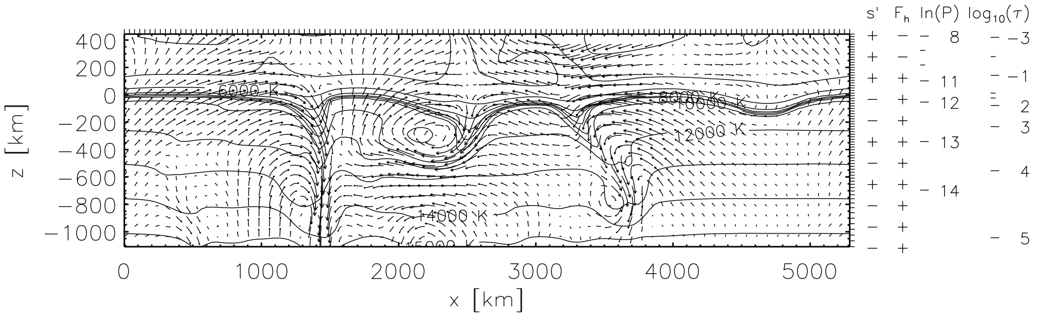


Abbildung 14: Strömungsbild eines Sonnenmodells (L71D05) mit $T_{\text{eff}} = 5770\,\text{K}$, $\log g = 4.44$. Das Modell umfaßt ein Gebiet von 5250 km (horizontal) $\times$ 1500 km (vertikal, Nullpunkt bei $\tau = 1$). Die kleinen Markierungen am oberen Rand und an der rechten Seite geben die Positionen der Punkte des numerischen Gitters an (horizontal 142 Stützstellen, vertikal 71 Stützstellen). Das Geschwindigkeitsfeld wird mit Hilfe von Pseudostromlinien dargestellt, deren Bahn über $t_{\text{int}} = 25\,\text{s}$ integriert wurde. Die Maximalgeschwindigkeit ist $v_{\max} = 10.3\,\text{km/s}$. Isothermen in Schritten von 1000 K folgen dem Temperaturfeld. Die vier Spalten rechts zeigen das Vorzeichen des horizontal gemittelten vertikalen Entropiegradienten $s' = ds/dz$ ($s' < 0$ bedeutet nach Gleichung (3.77) konvektive Instabilität), das Vorzeichen des vertikalen Enthalpieflusses F_h ($F_{\text{h,max}} \approx 100\,\%$, gemittelt über einen langen Zeitraum), den natürlichen Logarithmus des mittleren Druckes $\ln(P)$ (der Abstand zwischen zwei Markierungen ist eine Druckskalenhöhe) und den dekadischen Logarithmus der optischen Tiefe $\log_{10}(\tau)$. In einem herausgegriffenen Momentbild zeigen s' und F_h nicht notwendigerweise den regulären Verlauf wie in zeitlich gemittelten Modellen. Daher stammen die beiden positiven Vorzeichen von s' im eigentlich instabilen Gebiet. Boden und Deckel sind offen. Die seitlichen Randbedingungen sind periodisch. Für den Strahlungstransport wurde nicht die graue Näherung sondern das Mehrbandschema verwendet.

Es zeigt einen Schnappschuß des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes aus einem aktuellen Simulationslauf mit den solaren Werten für Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung und chemische Zusammensetzung. Das Modell umfaßt die oberen 1000 km der etwa 200000 km tiefen Konvektionszone der Sonne und die für die Spektroskopie wichtigen Schichten der Photosphäre. Der instabile Bereich beginnt erst am Boden der Photosphäre. Die obere offene Randbedingung soll eine möglichst gute Transmission von Wellen durch den Deckel gestatten. Die Randbedingung am Boden erlaubt das freie Ein- und Ausströmen von Materie, wobei die Gesamtmasse des Modells festgehalten wird und die Effektivtemperatur des Modells die Entropie des einströmenden Materials bestimmt. Man erwartet, daß die Konvektion unterhalb des Modells immer effektiver wird, so daß sich der logarithmische Temperaturgradient ∇ der Schichtung immer mehr dem adiabatischen annähert.

Die (hauptsächlich vertikal gerichtete) Bewegung in den Abströmkanälen und die (im wesentlichen horizontale) Bewegung in der Photosphäre erreicht stellenweise die Schallgeschwindigkeit. Die aufströmenden Gebiete, die heiße Materie aus tiefen Schichten herauftransportieren, zeigen kleinere Geschwindigkeiten, nehmen dafür aber einen größeren Flächenanteil ein. Rechts im Bild 14 bei $x = 4800\,\mathrm{km}$ entsteht gerade ein neues Abströmgebiet. Bei $x = 1400\,\mathrm{km}$ liegt ein tiefer senkrechter, voll entwickelter Jet. Die beiden anderen (bei $x = 2500\,\mathrm{km}$ und $x = 3400\,\mathrm{km}$) sind stark asymmetrisch und erreichen keine so große Tiefe.

Im konvektiv instabilen Gebiet ist eine negative Vertikalgeschwindigkeit mit einem Temperaturdefizit korreliert und umgekehrt. In der Photosphäre jedoch befinden sich über den Abströmgebieten Temperaturmaxima. Die hier zusammenlaufenden oft schallschnellen horizontalen Strömungen können Schocks verursachen. Diese sowie die turbulenten Strömungsanteile verwischen die strenge Geschwindigkeits-Temperatur-Korrelation (siehe Freytag 1991).

Die unterhalb der Schicht mit $\tau = 1$ dicht gedrängt liegenden Isothermen weisen auf den dort auftretenden Sprung in der Temperatur hin, der von der Opazitätsspitze von Wasserstoff erzeugt wird. Mit der Temperatur nimmt auch der Ionisationsgrad von Wasserstoff stark zu. In der Sprungschicht ist die konvektive Instabilität am größten, und es finden sich auch die stärksten horizontalen Temperaturfluktuationen. Sie werden in der Photosphäre und in den tiefen Schichten der Konvektionszone schwächer.

Das Strömungsmuster ist nun aber keineswegs stationär, sondern ändert sich auf einer Zeitskala von Minuten. Neue Abströmgebiete entstehen (Granulen teilen sich), wandern seitlich, werden im turbulenten Geschwindigkeitsfeld der Umgebung deformiert und verschmelzen schließlich mit anderen Abströmkanälen (Granulen werden kleiner und verschwinden). Das Verschmelzen zweier Jets ist ein dramatischer Prozeß, bei dem die Vertikalgeschwindigkeit kurzzeitig ansteigt und Schallwellen ausgesandt werden.

Trotz der verwendeten Näherungen lassen sich viele Eigenschaften der realen Sonnengranulation gut wiedergeben:

Auf der Sonne sieht man helle ausgedehnte Granulen mit aufwärtsströmender Materie von polygonaler Gestalt, begrenzt durch dunkle schmale intergranulare Gebiete mit abwärtsströmendem Gas. Die Granulen können sich teilen, was manchmal so vehement geschieht, daß man von explodierenden Granulen spricht, sie können miteinander verschmelzen, ihre Form und Größe verändern oder einfach verschwinden. Diese Prozesse lassen sich, wenn auch eingeschränkt auf zweidimensionale Geometrie, in den Simulationen wiederfinden. Eine Ausname bildet allerdings die Verschmelzung zweier Granulen. Der entsprechende Vorgang des Verschwindens eines Abströmgebietes kommt in den 2D-Simulationen nicht vor.

Granulen auf der Sonne haben typische Größen von 1.4" oder etwa 1000 km (siehe Bray et al. 1984, Tabelle 2.1) und besitzen mittlere Lebensdauern um die 10 Minuten (siehe Bray et al. 1984, Tabelle 2.7). Beide Skalen sind auch für die simulierten Granulen typisch.

Beim Vergleich des auf der Sonne gemessenen Intensitätskontrastes mit dem aus den Simulationen gewonnenen Wert muß beachtet werden, daß die beobachteten Werte durch den bildverschmierenden Einfluß der Erdatmosphäre und des Meßinstruments verringert werden. Die Rückrechnung auf den wahren Wert ist mit erheblichen Unsicherheiten verbunden, was zu einer starken Streuung der Werte aus verschiedenen Untersuchungen führt (siehe Freytag 1991, Tabelle 8). Insgesamt liegen die Kontrastwerte aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen am oberen Rand des beobachteten/korrigierten Kontrastbereiches (Freytag 1991).

Die konvektiven Geschwindigkeiten in der Photosphäre haben die gleiche Größenordnung wie die in der Spektroskopie eingeführten Parameter von Mikroturbulenz (1.35 km/s) und Makroturbulenz. Der Vergleich von aufgrund der Simulationen gewonnenen synthetischen Spektren mit beobachteten ergibt eine befriedigende wenn auch nicht perfekte Übereinstimmung der Form der Bisektoren (Freytag 1991, Freytag und Steffen 1991).

In den Simulationen findet man, daß beim Verschmelzen zweier Abströmkanäle zu einem einzigen Schallwellen erzeugt werden, die die Simulationsbox zu Eigenschwingungen (p-Moden) mit einer Periode von ca. 3 bis 5 Minuten anregen. Auch die Eigenmoden der Sonne sind meßbar (siehe Seite 71). Sie treten jedoch in viel höherer Zahl als in den Simulationen auf und besitzen ein anderes Spektrum, denn sie sind Eigenschwingungen der ganzen Kugel. Aber die typischen Frequenzen und die gesamte Amplitude der Schwingungen von Simulationen und Beobachtung sind vergleichbar. Das legt die Vermutung nahe, daß der in den Simulationen gefunden Anregungsmechanismus auch in der Sonne wirkt. Der in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen erzeugte Fluß akustischer Energie würde ausreichen, um die Sonnenchromosphäre zu heizen (Steffen 1994).

Verwendet man die Entropie des durch den Boden in das Simulationsvolumen heraufströmenden Materials, um den Mischungswegparameter zu kalibrieren, so ergibt sich mit Hilfe der Mischungswegtheorie eine Tiefe der Konvektionszone von etwa 200000 km (Steffen 1992) in guter Übereinstimmung zu modernen helioseismologischen Untersuchungen (Christensen-Dalsgaard et al. 1991, Guzik und Cox 1993).

In den Simulationsrechnungen findet man die größte aufwärtsgerichtete Geschwindigkeit oftmals direkt neben einem Abströmgebiet. Diese Aufwärtsströmung kann heiße Materie bis in die sichtbaren Schichten transportieren, was dazu führen kann, daß die hellsten Stellen einer Granule nicht in ihrer Mitte sondern am Rand in der Nähe der intergranularen Gebiete liegen, was sich auch in aktuellen hochaufgelösten Beobachtungen mit Hilfe der Speckle-Interferometrie zeigt (de Boer et al. 1992, de Boer 1993).

Die gute qualitative und quantitative Übereinstimmung zwischen den numerischen Resultaten und den Beobachtungen gibt Grund zu der Überzeugung, daß trotz der zahlreichen notwendigen Näherungen so viel realistische Physik in den Simulationen berücksichtigt wird, daß alle wesentlichen Aspekte realer solarer Konvektion korrekt wiedergegeben werden. D.h. man kann das Programm nun nach gegebenenfalls notwendiger Modifikation von Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung, chemischer Zusammensetzung, Modellausdehnung, Zustandsgleichung und Opazitätstabelle zur Modellierung der Oberflächenkonvektionszonen anderer Sterne verwenden. In dieser Arbeit werde ich Resultate der Untersuchungen über Hauptreihen-A-Sterne und kühle Weiße Zwerge vom Typ DA präsentieren.

6.2 Kühle Weiße Zwerge vom Typ DA

Weiße Zwerge vom Typ DA besitzen eine reine Wasserstoffatmosphäre, weil alle schwereren Elemente durch die Wirkung der extrem starken Gravitation abgesunken sind und sich in sehr tiefen von außen nicht sichtbaren Schichten ansammeln. Diese Sterne zeigen folglich nur ein einfaches Wasserstoff-Spektrum. In ihrem Inneren findet keine Kernfusion mehr statt. Ihre Oberflächenschwerebeschleunigung ist mit $\log g = 8.0$ um rund einen Faktor 10^5 größer als auf der Erde, und um ca. einen Faktor 4000 größer als in Hauptreihensternen. Ihre Masse ist mit ungefähr $0.6\,\mathrm{M}_\odot$ nur wenig geringer als die der Sonne. Aber ihr Radius ist mit dem der Erde vergleichbar. Entsprechend gering ist der ausgesandte Energiefluß. Es gibt keinen Weißen Zwerg, der mit bloßen Auge sichtbar ist. Allerdings besitzen einige der bekannten Hauptreihensterne wie z.B. Sirius einen Weißen Zwerg als Begleiter.

Ausgehend von einem Modell von Hans-Günter Ludwig (siehe Ludwig, Jordan und Steffen 1994) mit $T_{\text{eff}} = 12600\,\text{K}$ und $\log g = 8.0$, habe ich Modelle in einem Effektivtemperaturbereich von 14200 K bis 11400 K und $\log g = 8.0$ gerechnet. Um den Einfluß der Schwerebeschleunigung abzuschätzen, habe ich außerdem für $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$ Simulationen mit $\log g = 7.7$ und $\log g = 8.3$ durchgeführt.

Diese Sterne besitzen im unteren Teil der Photosphäre eine Wasserstoffionisationszone, d.h. hier liegt Wasserstoff zum Teil in atomarer Form und zum Teil dissoziiert vor. Wird dem Gas hier Energie zugeführt, erfolgt nur eine kleine Temperaturerhöhung, der größte Teil dient zur Ionisation des Wasserstoffs. D.h. die spezifische Wärme ist hoch (siehe Abbildung 2) und der adiabatische Temperaturgradient klein (Gleichung (2.64)). Andererseits hat auch die Opazität hier ein lokales Maximum (siehe Abbildung 2), was zu einem großen radiativen Temperaturgradienten führt (Gleichung (5.5)). Eine radiative Schichtung ist hier nach dem Schwarzschild-Kriterium (3.71) gegen konvektive Störungen instabil. Hier muß also eine Konvektionszone liegen.

Mit abnehmender Effektivtemperatur sinkt die Wasserstoffionisationszone in immer tiefere Schichten der Photosphäre. Dadurch wächst einerseits die Brunt-Väisälä-Frequenz, also die Anwachsrate für (adiabatische) konvektive Störungen. Andererseits wächst auch die optische Tiefe und die optische Dicke einer Störung. Deshalb wächst auch die Strahlungsrelaxationszeit (siehe Gleichung (3.30) und Abbildung 8), d.h. die dämpfende Wirkung der Strahlung auf konvektive Störungen nimmt ab. Nach Gleichung (4.75) wächst deshalb die effektive Anwachsrate dieser Störungen stark an, und die sich entwickelnde Konvektion wird immer effektiver, was sich auch schon in einfachen Mischungswegmodellen zeigt. Im heißesten Modell der gerechneten Sequenz (14200 K, siehe Abb. 15) transportiert die Konvektion gerade 0.0037 % des gesamten Flusses, und die Temperaturschichtung ist praktisch noch völlig radiativ. Im kühlsten Modell (11400 K, siehe Abb. 23) erreicht die Konvektion eine Effektivität von knapp 100 % und beeinflußt die Temperaturschichtung deutlich. Sie dringt außerdem mit abnehmender Effektivtemperatur immer tiefer nach unten in den Stern vor.

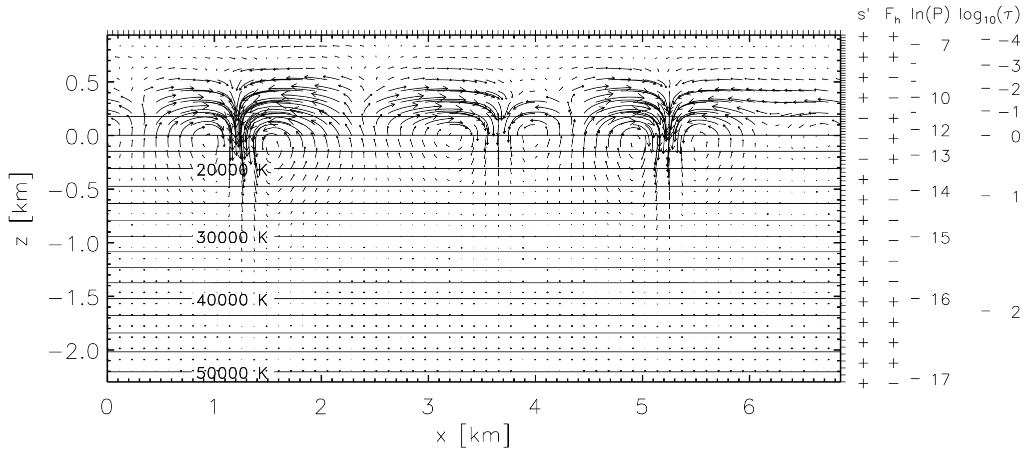


Abbildung 15: Strömungsbild eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT142g80N1) mit $T_{\text{eff}} = 14200\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, $v_{\max} = 0.8\,\text{km/s}$, $t_{\text{int}} = 1.0\,\text{s}$, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten. Der Enthalpiefluß beträgt maximal 0.0037 %. Die Temperaturschichtung ist noch radiativ. Die Isothermen sind planparallel. Das Vorzeichen des Enthalpieflusses F_h in den tiefen Schichten wird von numerischen Rundungsfehlern beeinflußt.

Abbildung 16 zeigt das Strömungsbild eines Modells mit $T_{\text{eff}} = 13800\,\text{K}$ und einem maximalen Enthalpiefluß von weniger als $0.1\,\%$. D.h. die Konvektion trägt praktisch nichts zum gesamten Energiefluß bei, und die Schichtung ist praktisch noch radiativ. Schon in diesem Modell ist die Asymmetrie zwischen schmalen Abströmgebieten mit hohen Vertikalgeschwindigkeiten und ausgedehnten Regionen, in denen die Materie mit kleinerer Geschwindigkeit aufwärts strömt, deutlich sichtbar. Sie wird sich in den kühleren Modellen noch verstärken.

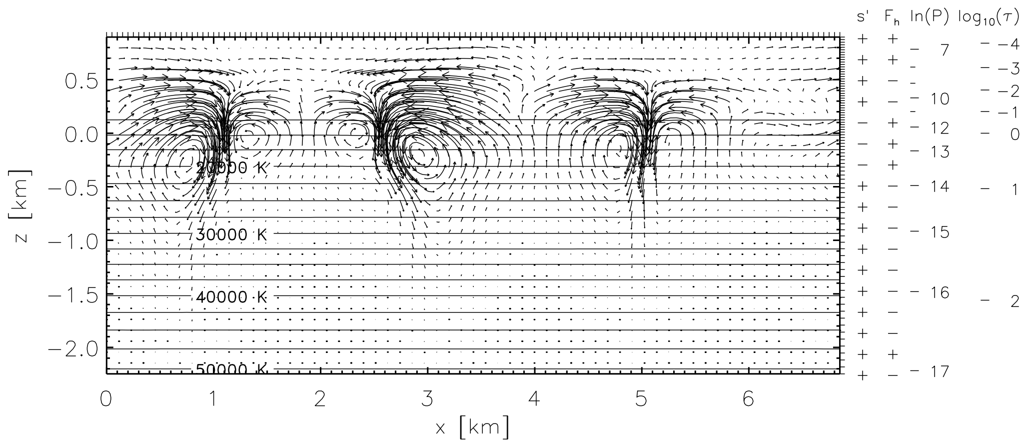


Abbildung 16: Strömungsbild eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT138g80N1) mit $T_{\text{eff}} = 13800\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, $v_{\max} = 2.8\,\text{km/s}$, $t_{\text{int}} = 0.4\,\text{s}$, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten. Der Enthalpiefluß beträgt maximal $0.085\,\%$. Die Temperaturschichtung ist praktisch noch radiativ. Die Isothermen sind annähernd planparallel. Trotzdem ist die Konvektion in der Lage, die gesamte darunterliegende sich innerhalb des Modellvolumens befindliche Materie zu durchmischen.

Eine Sequenz von Strömungsbildern zeigt die Abbildung 17 für ein Modell mit $T_{\text{eff}} = 13400\,\text{K}$. Der Enthalpiefluß ist um einen Faktor 10 größer als beim vorigen Modell, aber immer noch unbedeutend. Immerhin lassen sich die Abweichungen der Isothermen von der Planparallelität schon mit bloßem Auge ausmachen. Die gezeigte Bildfolge ist typisch für die Dynamik aller Modelle mit ineffektiver Konvektion sowohl für Weiße Zwerge als auch für Hauptreihensterne. Sie zeigt, wie zwei Abströmgebiete aufeinanderzulaufen und schließlich zu einem einzigen (in der Mitte des untersten Bildes) verschmelzen, wobei sich die Vertikalgeschwindigkeit kurzzeitig erhöht. Kurz nach dem Verschmelzen erreicht der Abströmkanal eine größere Tiefe als sonst. Gleichzeitig entsteht bei $x = 1\,\text{km}$ in einer Region mit geringen vertikalen Geschwindigkeiten aufgrund der konvektiven Instabilität ein neues Abströmgebiet. Auch in der rechten Bildhälfte bei $x = 5.5\,\text{km}$ bildet sich kurzzeitig ein neues Abströmgebiet, das jedoch schon vor Erreichen der typischen Maximalgröße von einem Nachbarjet verschluckt wird.

Der Wettbewerb zwischen der konvektiven Instabilität, die neue Abströmgebiete erzeugt, und der horizontalen Advektion, die diese Gebiete in schon bestehende hineintreibt und sie verschmelzen läßt, bestimmt den mittleren horizontalen Abstand zweier Abströmkanäle, also die Größe einer Granule (siehe die drei Arbeiten von Rast et al. 1993).

Positiver Enthalpiefluß beschränkt sich noch im wesentlichen auf die konvektiv instabilen Schichten (siehe auch Abb. 24a und c). Das Geschwindigkeitsfeld ist jedoch auch in den tiefsten Schichten des Modells von Null verschieden. Der Abfall des rms-Wertes der Vertikalgeschwindigkeit folgt dabei klar einem exponentiellen Verlauf (Abb. 24b und d), der erst in unmittelbarer Nähe des geschlossenen Bodens gezwungenermaßen durchbrochen wird.

Bei einer Effektivtemperatur von 12200 K wird schon maximal ein Drittel der Energie durch die Konvektion transportiert (Abbildung 18). Das Gebiet mit nicht verschwindendem Enthalpiefluß ist deutlich größer als die eigentliche instabile Schicht (Abb. 25). Unterhalb der Region mit positivem Enthalpiefluß schließt sich eine Zone mit negativem Fluß von einigen Prozent des Gesamtflusses an. Hier transportiert die Konvektion also Energie abwärts. Diese beiden Schichten lassen sich auch in der Abbildung 18 an der höhenabhängigen Korrelation von Vertikalgeschwindigkeit und Temperaturfluktuationen identifizieren: Sind Abströmgebiete kühler als ihre Umgebung, ist der Enthalpiefluß positiv. Ab einer gewissen Tiefe ist die Temperatur im Abströmgebiet höher als die Umgebung, und der Enthalpiefluß ist negativ.

Die Geschwindigkeiten sind deutlich höher als in den heißeren Modellen. In den beiden Abströmkanälen wird die Schallgeschwindigkeit überschritten. In der Photosphäre bilden sich Schocks aus.

Die Dynamik wird immer noch von dem Wechselspiel von Entstehung, Advektion und Verschmelzen von Abströmgebieten bestimmt. Aber dieser Vorgang spielt sich wegen der höheren Geschwindigkeiten jetzt auf kürzeren Zeitskalen ab und wird mehr und mehr von der Turbulenz beeinflußt. Insbesondere die dominierenden Jets ändern ihre Form und Tiefenausdehnung ständig. Die Scheerströmungen an ihren Flanken machen sie instabil, so daß sie eher selten die symmetrische Gestalt wie in der Abbildung 18 besitzen. Besonders nach einem Verschmelzen steigen die Geschwindigkeiten an, und es entstehen in den Scheerströmungen am Rand der Jets aufgrund der Helmholtz-Kelvin-Instabilität Wirbel, die entlang der Jets nach unten transportiert werden und einen Vergleich mit einer Kármánsche Wirbelstraße nahelegen. Das untere Ende eines Abströmgebiets wird ständig hin- und hergerissen.

Die Konvektionszone erstreckt sich über einige Druckskalenhöhen. Trotzdem tritt kein „vertical stacking“ auf. Es bildet sich keine Kaskade übereinanderliegender und mit der Tiefe immer größer werdender Wirbel, wie man nach dem Bild, das die Mischungswegtheorie von der Konvektion entwirft, vermuten könnte, sondern es entstehen großräumige vertikale Strukturen, die die ganze Tiefe der Konvektionszone umfassen. Aber dadurch, daß es Jets mit verschiedener vertikaler Ausdehnung gibt, deren oberer Teil aber immer im konvektiv instabilen Gebiet nahe des Deckels des Modells liegt, steigt der mittlere horizontale Abstand zwischen zwei Abströmkanälen mit der Tiefe an. Die konvektive Struktur, die in der Photosphäre (prinzipiell) beobachtbar ist, setzt sich also nicht unverändert bis zum Boden der Konvektionszone fort.

Enthalpiefluß und kinetischer Energiefluß konzentrieren sich in den Abströmkanälen (Abb. 19 und 20).

Die Abbildung 21 gibt die Lage der Wasserstoffionisationszone im Modell an.

Mit weiter abnehmender Effektivtemperatur steigt die Effektivität der Konvektion immer mehr an (siehe Abb. 22), so daß im Modell mit $T_{\mathrm{eff}} = 11400\,\mathrm{K}$ (siehe Abb. 23) in bestimmten Schichten praktisch der gesamte Energiefluß in Form von Konvektion geschieht. Dadurch kann schon eine Sättigung eintreten: Wie aus Abbildung 26a ersichtlich ist, ist die Schichtung in einem gewissen Tiefenintervall schon annähernd adiabatisch (d.h. die Entropie s ist praktisch konstant).

Auch bei dieser Effektivtemperatur kommen noch tiefe Abströmkanäle vor, die das Modell von oben bis unten durchqueren. Aber sie haben unter dem zerstörerischen Werk der Turbulenz zu leiden: Sie sind instationär, es werden Wirbel nach unten geleitet, das untere Ende der Jets wird hin- und hergeschleudert und kann gelegentlich abreißen,

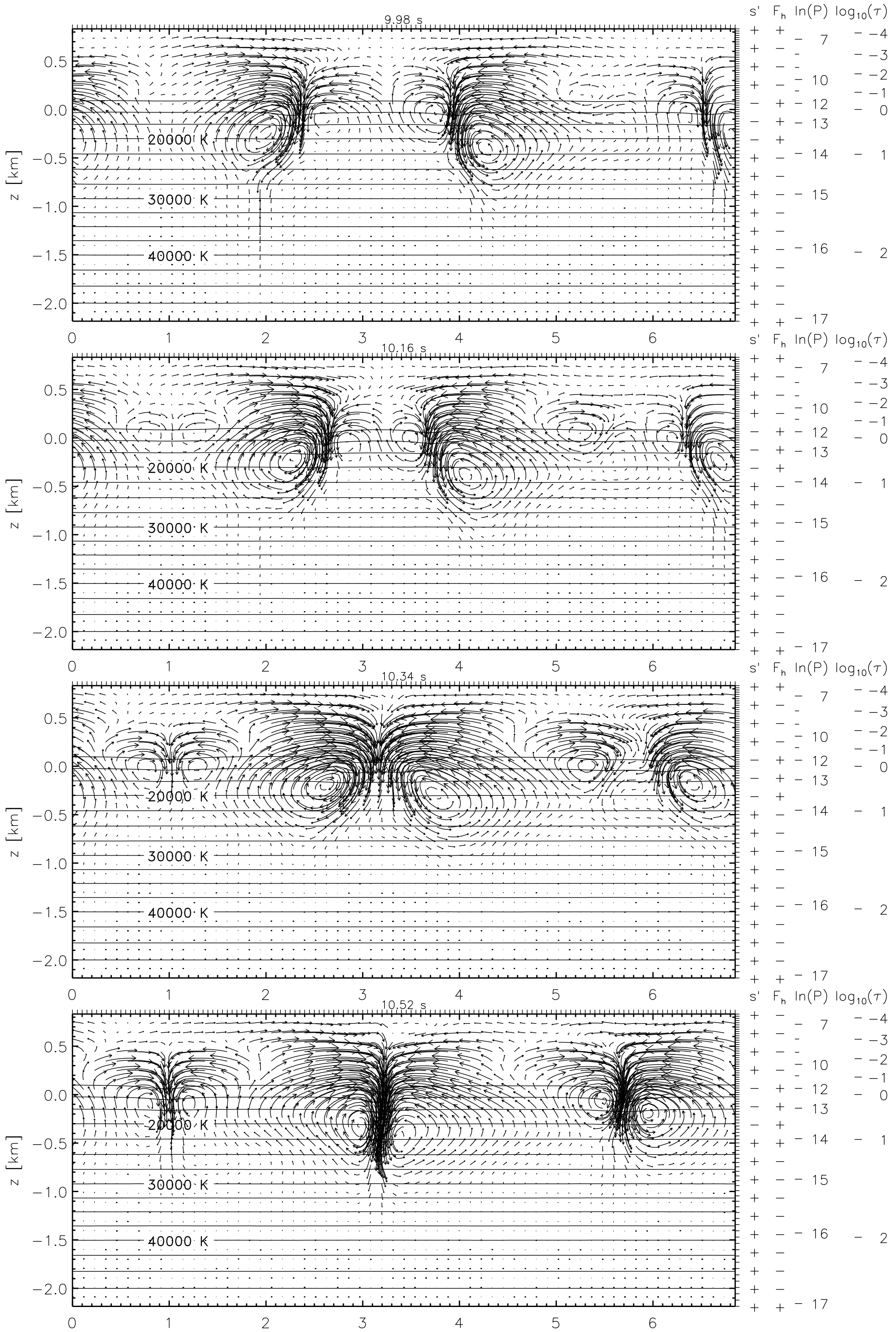


Abbildung 17: Sequenz von Strömungsbildern eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\rm eff}$ = 13400 K, $\log g$ = 8.00, $v_{\rm max}$ = (4.6, 5.3, 7.0, 7.9) km/s, $t_{\rm int}$ = 0.18 s, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten. Die einzelnen Schnappschüsse haben einen zeitlichen Abstand von 0.18 s. Der Enthalpiefluß beträgt maximal 0.8 %.

so daß tatsächlich so etwas wie kühle Blasen entstehen können, die jedoch eine kurze Lebensdauer besitzen. Die Turbulenz kann sogar so stark werden, daß sie einen Jet förmlich in Stücke reißt wie im Momentbild 23.

Noch kühlere Modelle würden noch effektivere Konvektionszonen besitzen, die sich in immer größere Tiefen erstrecken. In diesen Tiefen wird die Strahlungsrelaxationszeit immer länger, d.h. die Strahlungsdämpfung spielt eine immer geringere Rolle beim Glätten von Störungen, und das Auftreten sehr schmaler Jets wird durch diese Dämpfung nicht mehr behindert. Solche Jets mit ihren hohen Geschwindigkeitsgradienten können aber nicht mehr über viele Skalenhöhen stabil sein, ohne von Turbulenz angegriffen zu werden, die die Tendenz hat, große Strukturen zu zerstören und die kinetische Energie auf kleinere Skalen zu übertragen. Effiziente konvektive Strömungen in größeren Tiefen werden mehr dem Bild turbulenter Konvektion ähneln, wie es z.B. Porter und Woodward (1994) in ihrer Arbeit über hochaufgelöste aber ansonsten stark idealisierte Simulationen kompressibler Konvektion entwerfen, das von einem breiten Größenspektrum von Wirbeln geprägt wird.

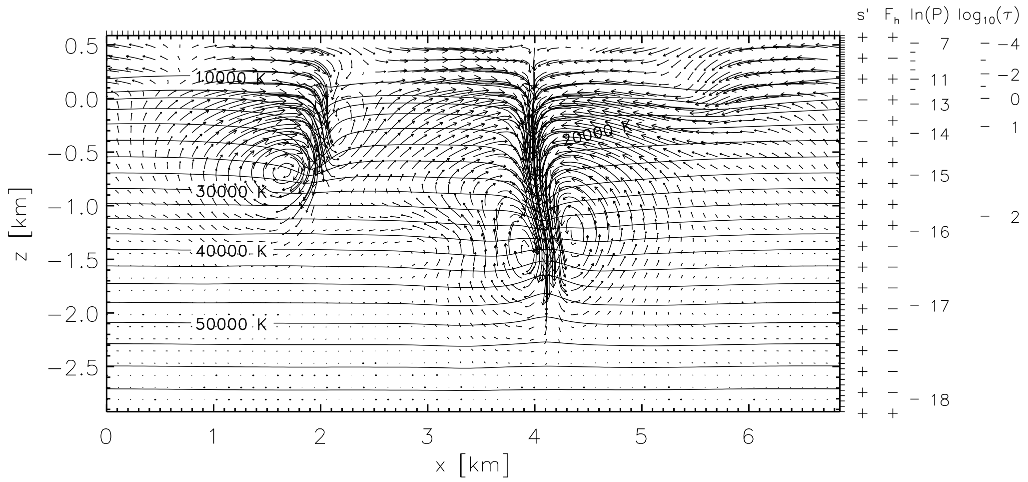


Abbildung 18: Strömungsbild eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g80N2) mit $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, $v_{\max} = 20.4\,\text{km/s}$, $t_{\text{int}} = 0.05\,\text{s}$, geschlossenem Boden und Deckel, nichtgrauen Opazitäten. Der Enthalpiefluß beträgt maximal 31 %. Die Temperaturschichtung zeigt deutliche Abweichungen von der Planparallelität. Die abwärtsschießende Materie in den Jets strömt weit über die konvektiv instabile Schicht hinaus.

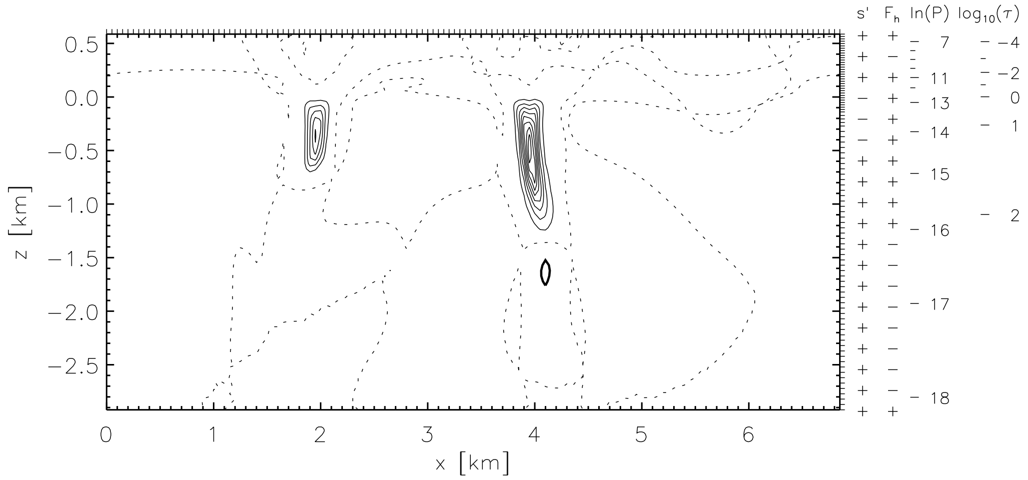


Abbildung 19: Netto-Enthalpiefluß eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g80N2) mit $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, geschlossenem Boden und Deckel, nichtgrauen Opazitäten. Dargestellt sind die Konturlinien des vertikalen Netto-Enthalpieflusses $(h - \langle h \rangle_x)\rho v$ in Schritten von σT_{eff}^4. Gestrichelte Linie: 0, dünne Linien: positiver Fluß, dicke Linie: negativer Fluß. Gleicher Zeitpunkt wie Bild 18.

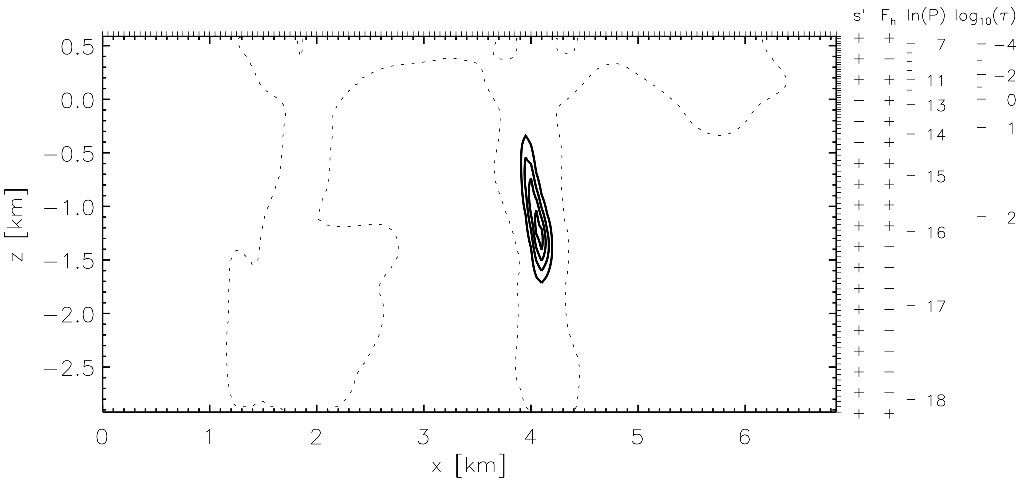


Abbildung 20: Kinetischer Energiefluß eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g80N2) mit $T_{\rm eff}$ = 12200 K, $\log g$ = 8.00, geschlossenem Boden und Deckel, nichtgrauen Opazitäten. Dargestellt sind die Konturlinien des vertikalen kinetischen Energieflusses in Schritten von $\sigma T_{\rm eff}^4$. Gestrichelte Linie: 0, dünne Linien: positiver Fluß, dicke Linien: negativer Fluß. Gleicher Zeitpunkt wie Bild 18.

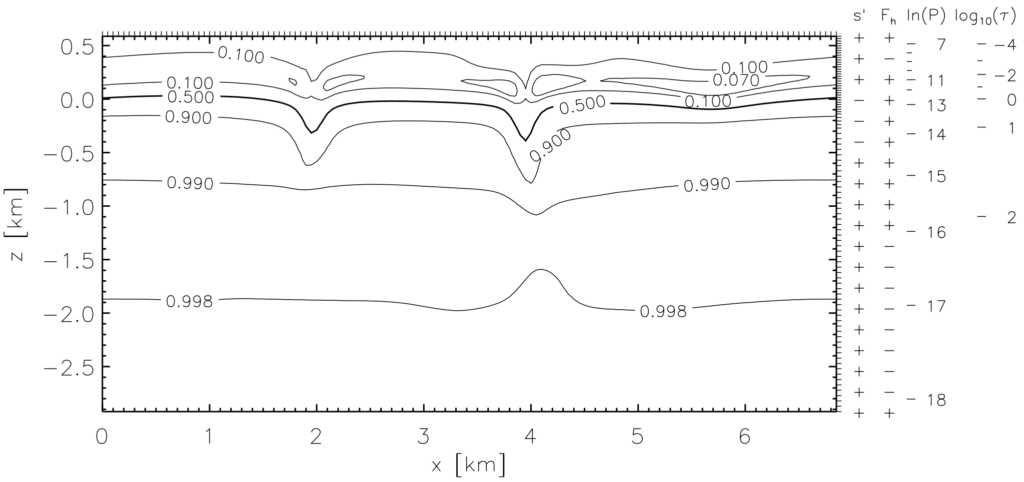


Abbildung 21: Wasserstoffionisationsgrad eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g80N2) mit $T_{\rm eff}$ = 12200 K, $\log g$ = 8.00, geschlossenem Boden und Deckel, nichtgrauen Opazitäten. Gleicher Zeitpunkt wie Bild 18.

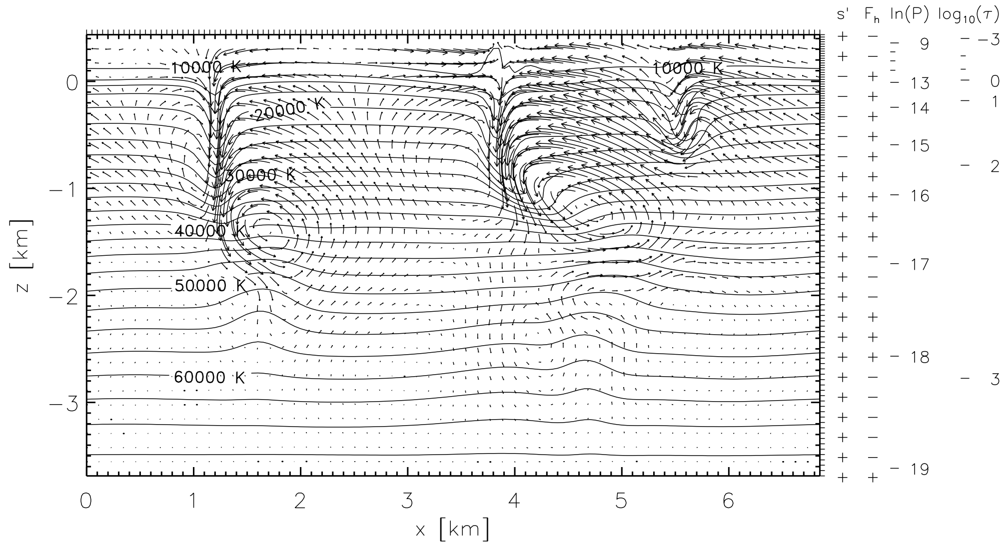


Abbildung 22: Strömungsbild eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT118g80N4) mit $T_{\rm eff} = 11800\,{\rm K}$, $\log g = 8.00$, $v_{\rm max} = 18.1\,{\rm km/s}$, $t_{\rm int} = 0.03\,{\rm s}$, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten. Der Enthalpiefluß beträgt maximal ca. 60 %.

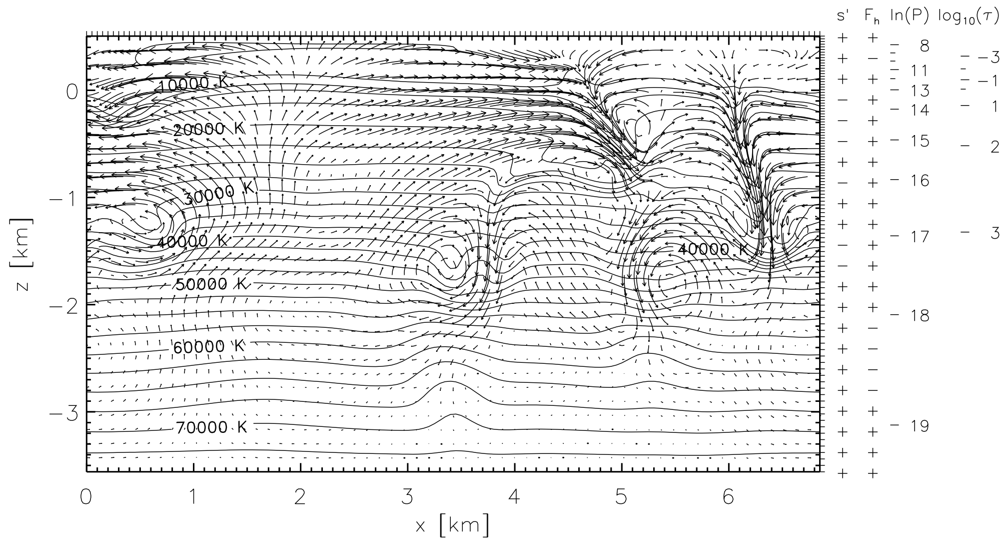


Abbildung 23: Strömungsbild eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT114g80N2) mit $T_{\rm eff} = 11400\,{\rm K}$, $\log g = 8.00$, $v_{\rm max} = 21.0\,{\rm km/s}$, $t_{\rm int} = 0.03\,{\rm s}$, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten. Der Enthalpiefluß beträgt maximal ca. 100 %. Die Abströmkanäle zeigen manchmal noch das regelmäßige Aussehen wie in Abbildung 18, aber oft werden sie wie in diesem Schnappschuß durch die Turbulenz förmlich zerrissen. Der hohe Turbulenzgrad der Strömung führt zu dem irregulären Verlauf des Entropiegradienten zu diesem Zeitpunkt.

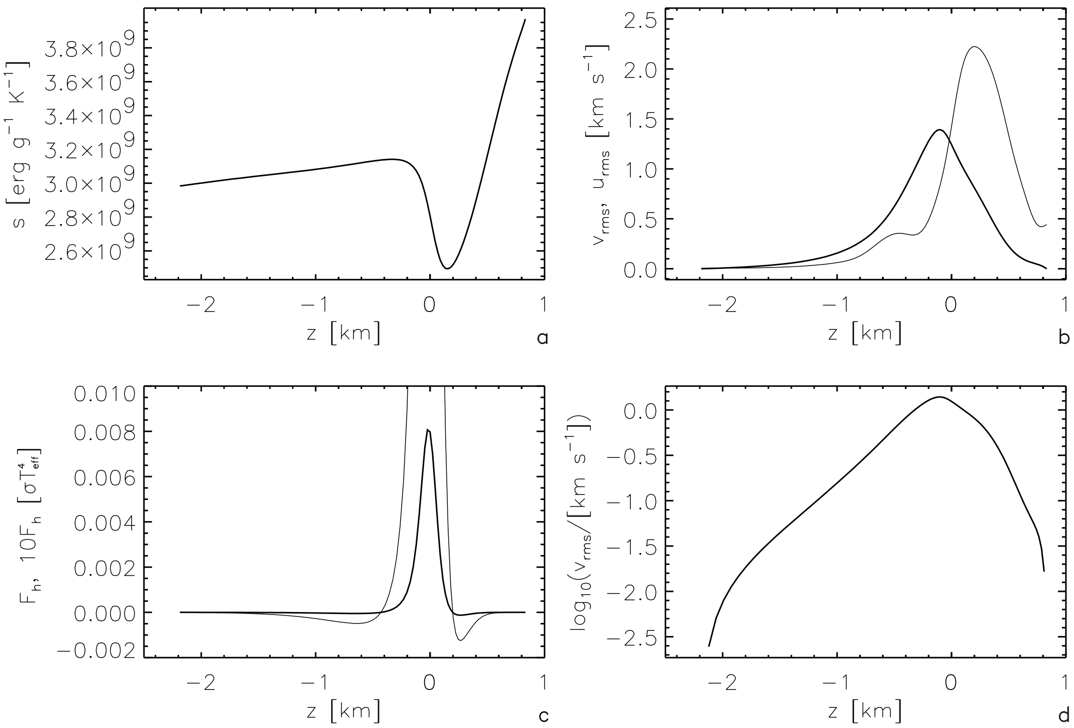


Abbildung 24: Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\text{eff}} = 13400\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten. Für jeden gespeicherten Zeitpunkt des Laufes (alle 0.02 s) wurden die horizontal gemittelte spezifische Entropie, der horizontal gemittelte Enthalpiefluß und der horizontale rms-Wert von Vertikal- und Horizontalgeschwindigkeit bestimmt. Diese Größen wurden dann über die zweite Hälfte der Simulation zeitlich gemittelt: a) spezifische Entropie s, b) rms-Werte von Vertikalgeschwindigkeit v_{rms} (dicke Linie) und Horizontalgeschwindigkeit u_{rms} (dünne Linie), c) Enthalpiefluß F_h (dicke Linie) und zehnfacher Enthalpiefluß $10F_h$ (dünne Linie), d) dekadischer Logarithmus der rms-Werte der Vertikalgeschwindigkeit $\log_{10}(v_{\text{rms}})$.

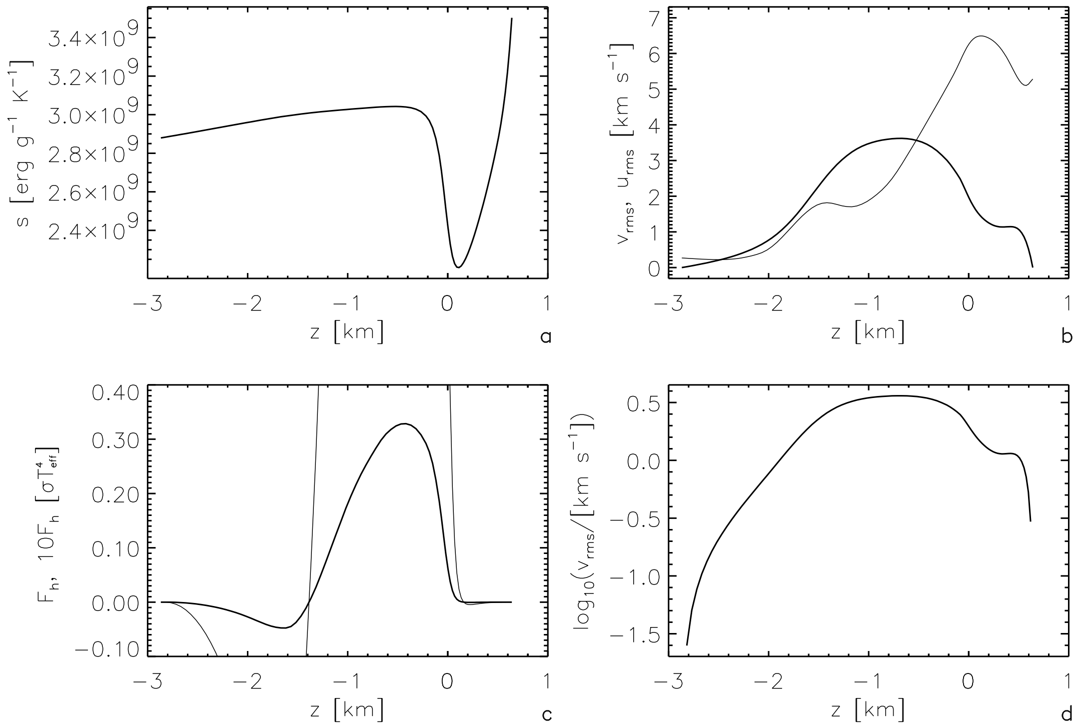


Abbildung 25: Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g80N1) mit $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten. (siehe Abb. 24 für weitere Erläuterungen).

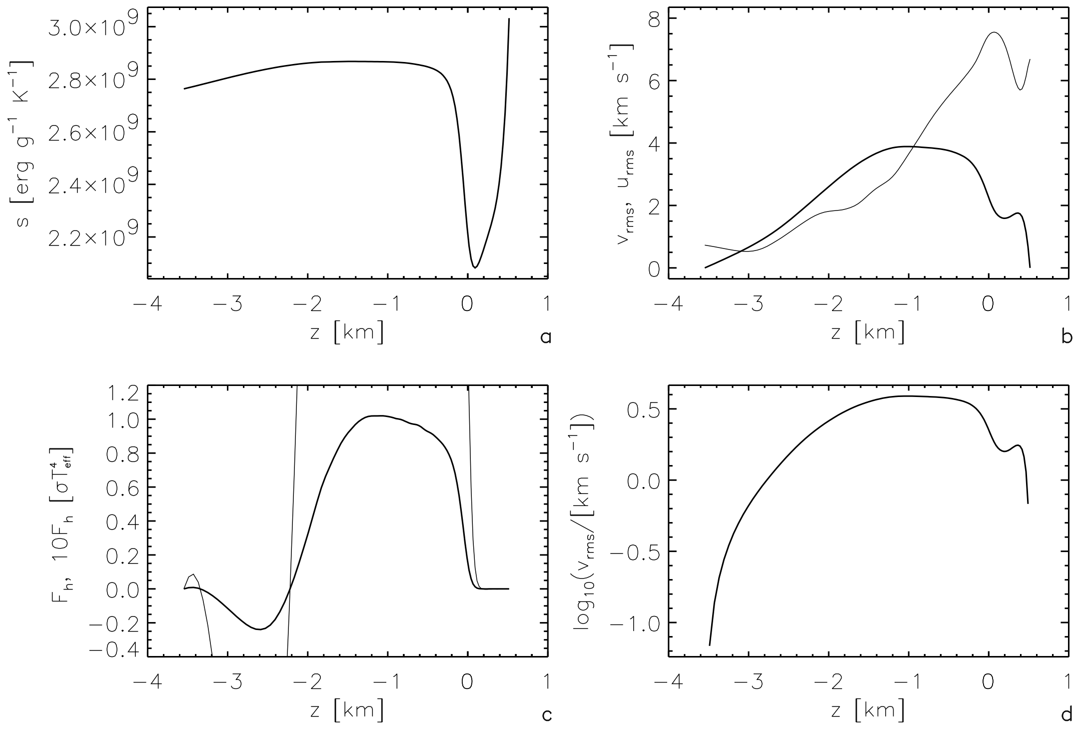


Abbildung 26: Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit eines Weißen Zwerges vom Typ DA (zt114g80n2) mit $T_{\rm eff} = 11400\,{\rm K}$, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten. (siehe Abb. 24 für weitere Erläuterungen).

6.3 Hauptreihen-A-Sterne

Einige der hellsten und bekanntesten Sterne am nächtlichen Himmel wie Wega, Sirius A und Atair zählen zu den Hauptreihen-A-Sternen. Ihr Spektrum wird von den Linien des Wasserstoffs dominiert. Aber im Gegensatz zu DA-Weißen Zwergen sieht man auch viele Metallinien. Die chemische Zusammensetzung der Photosphäre gleicht im wesentlichen der der Sonne. A-Sterne besitzen typischerweise etwa die doppelte Sonnenmasse und einen Radius von ca. 10^6 km. Ihre Oberflächenschwerebeschleunigung liegt nahe am solaren Wert. Sie sinkt im Laufe ihrer Entwicklung, während der sich die Sterne von der Hauptreihe immer mehr entfernen. Ihre Effektivtemperatur ist mit ca. 7500 K bis ca. 10000 K höher als die der Sonne.

A-Sterne besitzen somit eine wesentlich größere Ähnlichkeit zur Sonne als Weiße Zwerge. Die Struktur ihrer Konvektionszonen unterscheidet sich jedoch deutlich. Während die Sonne eine ca. 200000 km tiefe Hüllenkonvektionszone besitzt, ist die der A-Sterne mit etwa 10000 km recht flach. Dafür besitzen sie aber einen konvektiven Kern. Nach der Mischungswegtheorie besitzen A-Sterne zwei getrennte Konvektionszonen, nämlich eine direkt an der Oberfläche bei Temperaturen um 10000 K, die mit der Ionisation von Wasserstoff und der ersten Ionisationsstufe von Helium verknüpft ist, und eine etwas tieferliegende bei Temperaturen um 40000 K, die durch die zweite Ionisationszone von Helium gebildet wird.

Zahlreiche Beobachtungsbefunde und theoretische Untersuchungen geben Hinweise darauf, daß sich die Art und Stärke der Konvektion beim Übergang von G- zu F- zu A-Sternen verändert. Rechnungen auf der Grundlage der Mischungswegtheorie (Böhm-Vitense 1958, Böhm-Vitense und Nelson 1976, Renzini et al. 1977) zeigen, daß Konvektionszonen bei heißen A-Sternen extrem geringe Geschwindigkeiten, Effektivitäten und Tiefen besitzen. Mit fallender Effektivtemperatur steigt die maximale konvektive Geschwindigkeit rasch an, um bei ca. 8000 K ein Maximum zu erreichen (Renzini et al. 1977), dessen genaue Lage jedoch von Schwerebeschleunigung und Mischungswegparameter abhängt. Bei noch geringeren Effektivtemperaturen kann die Konvektion stellenweise den gesamten Energiefluß transportieren, die Maximalgeschwindigkeiten nehmen wieder ab. Die vertikale Ausdehnung der Konvektionszone wird jedoch immer größer, um schließlich bei der Sonne eine Tiefe von ca. 200000 km zu erreichen. Verfolgt man die Sequenz von Effektivtemperaturen noch weiter, wird schließlich beim Erreichen der Hayashi-Linie der gesamte Stern konvektiv instabil.

Dieses Geschwindigkeitsmaximum findet sich auch im Verlauf der Mikroturbulenz mit der Effektivtemperatur wieder (siehe Coupry und Burkhart 1992, Takeda 1992, Krege 1995). Dieser Parameter mußte in spektroskopischen Untersuchungen eingeführt werden, um die Dopplerverbreiterung von Linien durch nicht-thermische Geschwindigkeitsfelder zu berücksichtigen. Sowohl in seiner Abhängigkeit von der Effektivtemperatur als auch in seiner Größenordnung ähnelt er den konvektiven Geschwindigkeiten.

Bei der Analyse von stellaren Pulsationen hat das Verständnis des Modenspektrums größere Fortschritte gemacht, als das des Anregungsmechanismus. Man nimmt an, daß der klassische Cepheiden-Instabilitätsstreifen auf der blauen Seite dadurch begrenzt wird, daß dort die Ionisationszonen, in denen über den κ-Mechanismus Energie aus dem Strahlungsfeld in die Moden gepumpt wird, so hoch in der Sternhülle liegen, daß ihre thermische Zeitskala so klein wird, daß sie ihre Kopplung an die Pulsationen verlieren und sie nicht mehr antreiben können (siehe Deupree 1985, Li und Stix 1994). Die rote Kante soll dadurch bestimmt sein, daß bei noch geringeren Effektivtemperaturen die Konvektionszone so tief wird, daß ihr dämpfender Einfluß auf die Schwingungen die Oberhand über den Antrieb gewinnt, so daß das Auftreten der Pulsationen verhindert wird (Latour et al. 1976, Deupree 1977, Cox et al. 1979).

Böhm-Vitense (1990) nimmt an, daß das Auftreten von chromosphärischen Emissionslinien auf der roten Seite des Cepheiden-Instabilitätsstreifens mit der dort vorhandenen effektiven Wasserstoffkonvektionszone zusammenhängt, die erst ab einer gewissen Stärke in der Lage ist, mechanische Energie in höhere Atmosphärenschichten zu senden und so eine Chromosphäre zu heizen (siehe auch Simon und Landsman 1991).

Erst seit einigen Jahren ist es möglich, mit modernen Satelliten (Einstein, ROSAT) Röntgenstrahlung von Sternen zu messen. Diese Strahlung kann in Hauptreihensternen nicht in der Photosphäre erzeugt werden, da die Temperaturen dort viel zu niedrig sind. Die Röntgenstrahlung der Sonne wird in der mit einigen Millionen Kelvin extrem heißen Korona erzeugt. Simon und Drake (1993) können in ihren ROSAT-Messungen an einzelnen A- und frühen F-Sternen keine Röntgenemission entdecken. Sonnenähnliche Sterne besitzen solche Emissionen. Sie wurden aber auch bei heißen O- und B-Sternen gemessen, die keine Wasserstoffkonvektionszone besitzen. Der Zusammenhang von Koronen und Konvektion ist daher zumindest fraglich (siehe Böhm-Vitense 1990).

Dravins (1987) findet in seinen spektroskopischen Untersuchungen, daß sich die von der Sonne und sonnenähnlichen Sternen bekannte C-Gestalt der Bisektoren verändert und für den F0II-Stern Canopus in eine inverse C-Gestalt umwandelt, was ein Hinweis auf die unterschiedliche konvektive Strömungsform in beiden Spektralklassen ist.

Böhm-Vitense (1970) und Böhm-Vitense und Canterna (1974) finden in ihren photometrischen Untersuchungen eine charakteristische Lücke im Zwei-Farben-Diagramm, die sie damit erklären, daß die Konvektion bei etwa 8000 K abrupt einsetzt.

Die gerechneten Strahlungs-Hydrodynamik-Modelle von A-Sternen besitzen Effektivtemperaturen zwischen 9500 K und 7500 K mit Schwerebeschleunigungen zwischen $\log g = 3.90$ und $\log g = 4.40$. Für alle wurde eine solare Zusammensetzung der Elemente angenommen (siehe Tabelle 1). Genau wie bei den Weißen Zwergen (und aus den gleichen Gründen) ergibt sich bei abnehmender Effektivtemperatur eine Zunahme der Effizienz der Konvektion.

Ausgegangen bin ich bei meinen Rechnungen von Modellen von Wega ($T_{\rm eff} = 9500\,{\rm K}$, $\log g = 3.90$) von Hans-Günter Ludwig (1992), die auf den Rechnungen von Detlef Gigas (1990) basieren. Diese Modelle zeigen weitgehend planparallele mit der Zeit abklingende Schwingungen, denen kleine turbulente Wirbel überlagert sind. Wie sich dann aber im Laufe meiner Untersuchungen herausstellte, sind die planparallelen Oszillationen nur Überbleibsel einer Anfangsschichtung, die sich nicht exakt im hydrostatischen Gleichgewicht befindet. Die kleinen Wirbel stammen von kleinen Störungen im Geschwindigkeitsfeld, die anfänglich eingefügt worden sind, um als Keim für die Konvektion zu dienen. Die Simulationszeit war aber nicht lang genug, als daß sich eine voll entwickelte Konvektionszone hätte ausbilden können. Die bei diesen Modellen beobachteten Strömungsformen sind also einfache Einschwingvorgänge, die keinen direkten Bezug zu realen Konvektionszonen besitzen (siehe auch Abschnitt 10.2).

Um in meinen Rechnungen das Auftreten dieser planparallelen Schwingungen zu vermeiden, habe ich vor den Konvektionssimulationen jeweils eindimensionale Rechnungen durchgeführt. Auf diese Weise läßt sich mit geringem Aufwand eine lange Simulationszeit überstreichen, man kann das Abklingverhalten der Moden studieren und erhält schließlich statische Modelle oder zumindest Modelle mit einer kleinen Schwingungsamplitude. Diese Modelle habe ich auf zwei Dimensionen erweitert, mit einer kleinen, nicht planparallelen Störung des vertikalen Geschwindigkeitsfeldes versehen (siehe Formel (3.11)) und als Anfangsbedingungen für die folgenden Konvektionsrechnungen verwendet.

In den ersten Simulationsrechnungen zeigte es sich, daß in dem Parameterbereich, der Wega entspricht ($T_{\text{eff}} = 9500\,\text{K}$, $\log g = 3.90$), innerhalb der beschränkten Simulationszeit aus den anfänglichen Störungen keine ausgebildete Konvektion entsteht. Das liegt z.T. daran, daß die Strahlungsdämpfung so effektiv ist, daß die Anwachszeiten für konvektive Störungen sehr viel länger sind, als man aufgrund der Brunt-Väisälä-Zeitskala erwarten würde. Zum anderen ist es möglich, daß durch die künstliche Viskosität, die aufgrund der Diskretisierung eingeführt werden muß, die effektive Rayleigh-Zahl unterhalb des kritischen Wertes liegt, so daß sich auch nach einer wesentlich verlängerten Simulationszeit keine wachsenden Störungen zeigen würden. Dann müßte die effektive Rayleigh-Zahl durch eine Verfeinerung des Gitters erhöht werden.

Erst nach einer Verringerung der Effektivtemperatur zeigten sich die ersten Anzeichen für wachsende konvektive Strömungen (Modelle A3V_02, A5V_05, AT82g39N1, AT80g39N1 in Tabelle 8). Diese Modelle haben aber noch eine zu geringe horizontale und vertikale Ausdehnung.

Der Durchbruch kam erst mit der Reproduktion (und Erweiterung) der Rechnungen von Sofia und Chan (1984). Mit Hilfe zweidimensionaler Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen haben sie die konvektiven Strömungen der unteren Heliumkonvektionszone eines A5V- und eines F0V-Sterns simuliert. Meine Modelle für den A5V-Stern (AT85g41N1 bis AT85g41N3 in Tabelle 8) umfassen sowohl die Helium- als auch die obere Wasserstoffkonvektionszone (siehe Abb. 27). Die Modelle stimmen im Bereich der unteren Konvektionszone gut überein (vergleiche meine Abbildungen 33c und b mit den Abbildungen 3a und 2a von Sofia und Chan 1984). Im Bereich der oberen Konvektionszone können die Modelle sich nicht ähneln, weil Sofia und Chans obere Randbedingung mitten in dieser Zone liegt und die Konvektion praktisch ganz unterdrückt.

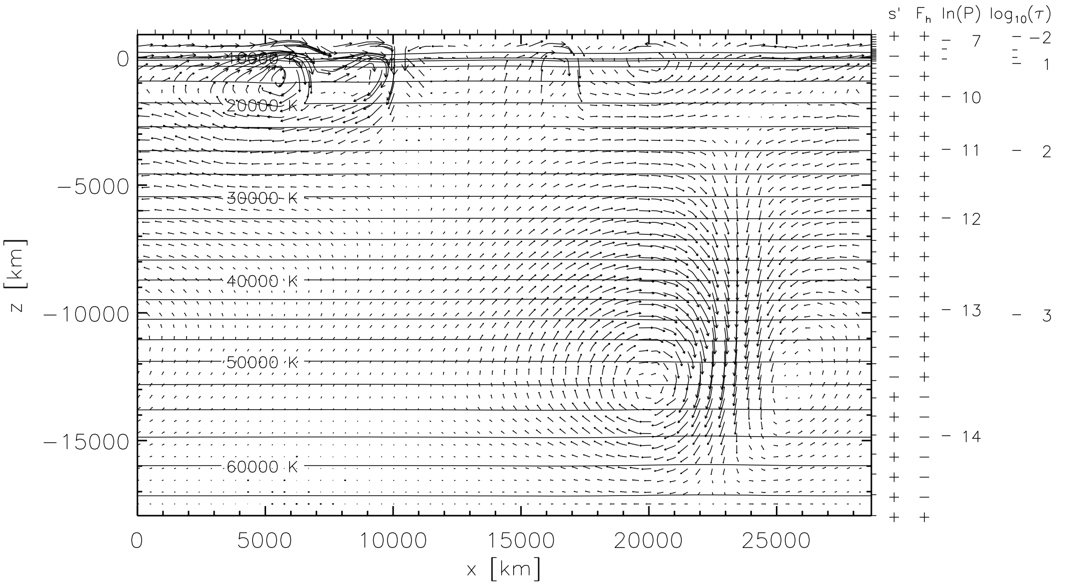


Abbildung 27: Strömungsbild eines A-Sterns (AT85g41N3) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$, $\log g = 4.13$, $v_{\max} = 10.3\,\text{km/s}$, $t_{\text{int}} = 400\,\text{s}$, $F_{\text{h,max}} = 0.45\,\%$, geschlossenem Boden, offenem Deckel. Dieser Stern besitzt zwei konvektiv instabile Zonen ($s' < 0$). Die Ausläufer der Strömungswirbel beider Konvektionszonen überlappen sich, so daß die konvektiv stabile Zone zwischen ihnen vollständig durchmischt wird.

In der Momentaufnahme 27 sieht man oben mehrere kleine Zellen, während die untere Konvektionszone nur eine wesentlich größere enthält. Beide Instabilitätszonen sind durch Overshoot verbunden. Auch am Boden des Modells, weit im stabilen Bereich, verschwinden die Geschwindigkeitsfelder nicht.

Im folgenden habe ich mich auf Modelle mit einer Schwerebeschleunigung von $\log g = 4.40$ beschränkt, was etwa dem solaren Wert bzw. der Nullalter-Hauptreihe entspricht.

Die Modelle mit einer Effektivtemperatur von 9500 K zeigen nach langen Anwachszeiten eine extrem schwache Konvektion mit einem maximalen Enthalpiefluß von ca. $3 \cdot 10^{-3}$ %. Die Daten dieser Modelle sind recht unzuverlässig, denn die Strömungen hatten nicht genügend Zeit, einen quasistationären Zustand zu erreichen. Außerdem gibt es in diesen Modellen Probleme mit Störungen, die vom Boden auszugehen scheinen.

Bei $T_{\text{eff}} = 9000$ K beträgt der maximale Enthalpiefluß schon ca. $7 \cdot 10^{-2}$ % (siehe Abbildungen 28 und 34). Man erkennt zwei kleine Abströmgebiete oben und ein großes unten, wobei sich die Ausläufer der Strömungen in beiden Gebieten überlappen und die dazwischenliegende stabile Zone vollständig durchmischen. Die Isothermen sind praktisch planparallel.

Im nächstkühleren Modell mit $T_{\text{eff}} = 8500$ K sind die Geschwindigkeiten in der oberen Wasserstoffkonvektionszone schon deutlich angewachsen (siehe Abb. 29). Der maximale Enthalpiefluß beträgt inzwischen ca. 2 % (siehe Abb. 35). Man erkennt sehr schön den im wesentlichen exponentiellen Abfall der Vertikalgeschwindigkeit in Abbildung 35d.

Für diese Effektivtemperatur habe ich auch Modelle gerechnet, die nur die untere Konvektionszone enthalten, aber dafür eine wesentlich größere horizontale Ausdehnung besitzen und einen deutlich größeren Zeitraum überstreichen, so daß sich auch hier mehrere wechselwirkende Abströmgebiete entwickeln können (siehe Abbildung 30).

Das 8000 K-Modell (siehe Abbildung 31) hat von seinem (zu kleinen) Vorgängermodell hohe laminare horizontale Geschwindigkeitsfelder geerbt, die die Abströmgebiete in der Wasserstoffkonvektionszone mit hoher Geschwindigkeit nach links treiben. Dadurch wird u.a. der Enthalpiefluß verringert. Er beträgt aber trotzdem immerhin maximal schon 16 % (siehe Abbildung 36). Das Geschwindigkeitsfeld der unteren Konvektionszone ist in Bild 31 kaum sichtbar. Das liegt z.T. daran, daß die Geschwindigkeiten oben sehr viel größer sind, z.T. aber auch an der relativ kurzen Simulationszeit für dieses Modell, so daß sich die untere Konvektionszone noch nicht recht entfalten konnte.

Das Modell mit einer Effektivtemperatur von 7500 K enthält nur noch die obere Wasserstoffkonvektionszone. Die Strömungen sind extrem vehement (siehe Abbildung 32). Der Enthalpiefluß kommt stellenweise auf einen Anteil von ca. 50 % vom Gesamtfluß. Der steile photosphärische Temperaturgradient wird in den Abströmgebieten nicht abgeflacht sondern mit in die Tiefe gerissen, so lange bis die Strahlung das kühle Material innerhalb des Jets auf Umgebungstemperatur aufheizen kann. Ist dies erreicht, erfolgt der Temperaturanstieg wieder sehr plötzlich.

Beim Verschmelzen zweier Abströmgebiete wird in den kühleren A-Stern-Modellen (ab ca. 8500 K) eine vom Jet nach außen laufende Schallwelle erzeugt. Ihre Amplitude nimmt in den Modellen mit fallender Effektivtemperatur deutlich zu. Diese Aussendung von Schallwellen ist auch in den Sonnenmodellen zu beobachten.

Aus der obigen Vorstellung der jeweils besten Modelle für einen Parametersatz ist sicherlich klar geworden, welche erheblichen Schwierigkeiten bei der Modellierung der A-Stern-Konvektionszonen auftreten, die zum größten Teil bei den Weißen Zwergen nicht vorhanden sind:

Die Existenz von zwei übereinanderliegenden Konvektionszonen erfordert auch bei den praktisch radiativen Modellen eine große vertikale Ausdehnung des Simulationsvolumens. Die großen Konvektionszellen in der unteren Zone verlangen eine große horizontale Modellausdehnung. Zur Auflösung des steilen Temperaturgradienten am Fuße

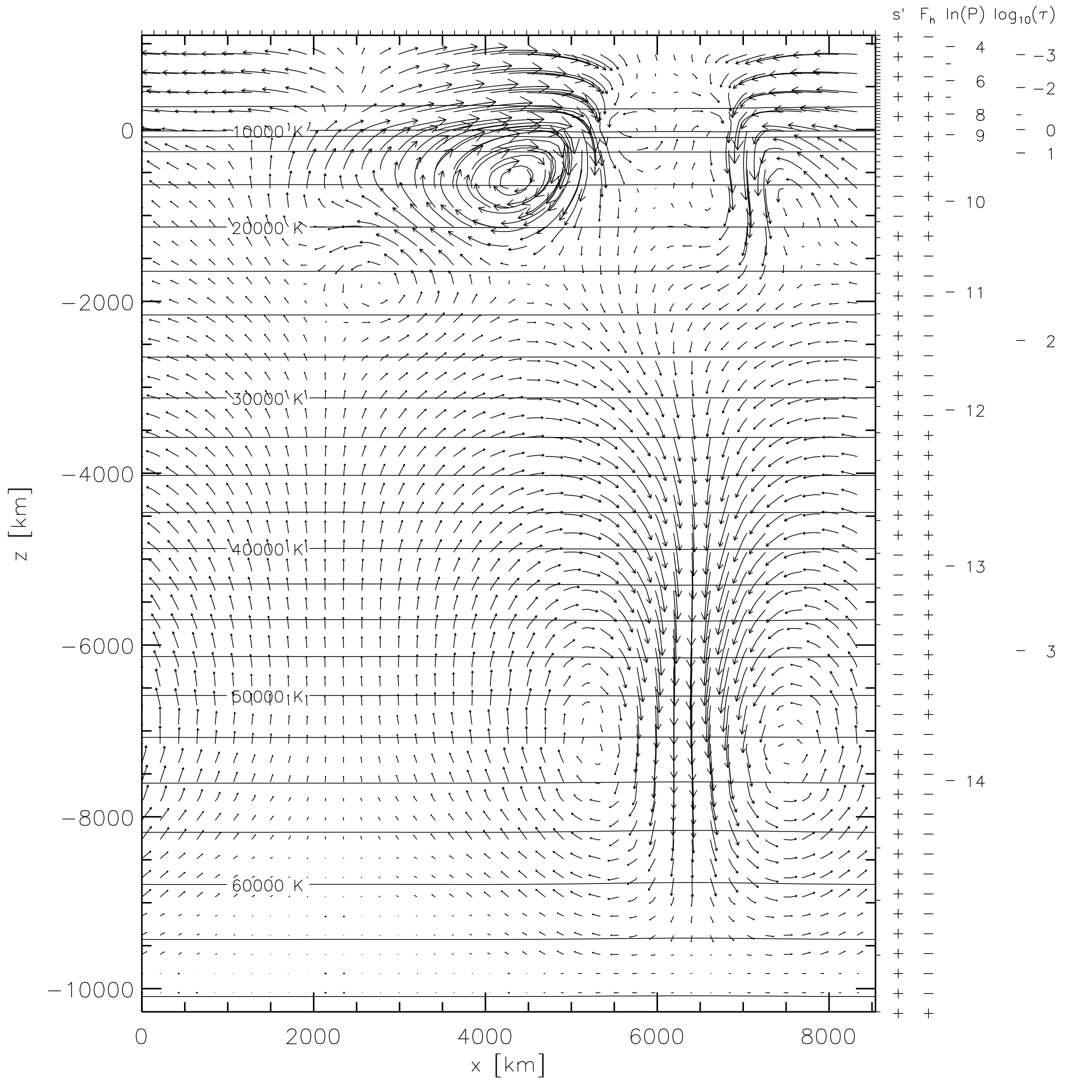


Abbildung 28: Strömungsbild eines A-Sterns (AT90g44N1) mit $T_{\text{eff}} = 9000\,\text{K}$, $\log g = 4.40$, $v_{\text{max}} = 3.8\,\text{km/s}$, $t_{\text{int}} = 400\,\text{s}$, geschlossenem Boden, offenem Deckel, $F_{\text{h,max}} = 7 \cdot 10^{-2}\,\%$. Dieser Stern besitzt zwei konvektiv instabile Zonen ($s' < 0$). Die Ausläufer der Strömungswirbel beider Konvektionszonen überlappen sich, so daß die konvektiv stabile Zone zwischen ihnen vollständig durchmischt wird.

der Photosphäre ist zumindest dort ein feines vertikales Gitter notwendig. Weil dieser Temperatursprung durch vehemente konvektive Strömungen auch in horizontaler Richtung auftreten kann (siehe Abb. 32) und um das Gitter-Seitenverhältnis nicht zu sehr von Eins abweichen zu lassen, ist auch ein entsprechend feines horizontales Gitter notwendig. D.h. man kann die vertikale Gitterweite in den tiefen Schichten auch nicht sehr vergrößern, weil sonst dort die einzelnen Gitterzellen zu sehr verzerrt würden. Das bedeutet also insgesamt, daß man sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung sehr viele Gitterpunkte benötigt.

Andererseits fordern die langen thermischen Relaxationszeiten in den tiefen Schichten eine entsprechend lange Simulationszeit, bis das Modell einen statistisch stabilen Zustand gefunden hat. Die großen Umwälzzeiten in der unteren Konvektionszone erfordern dann noch einmal genug Rechenzeit, um eine leidlich gute Sicherheit bei der zeitlichen

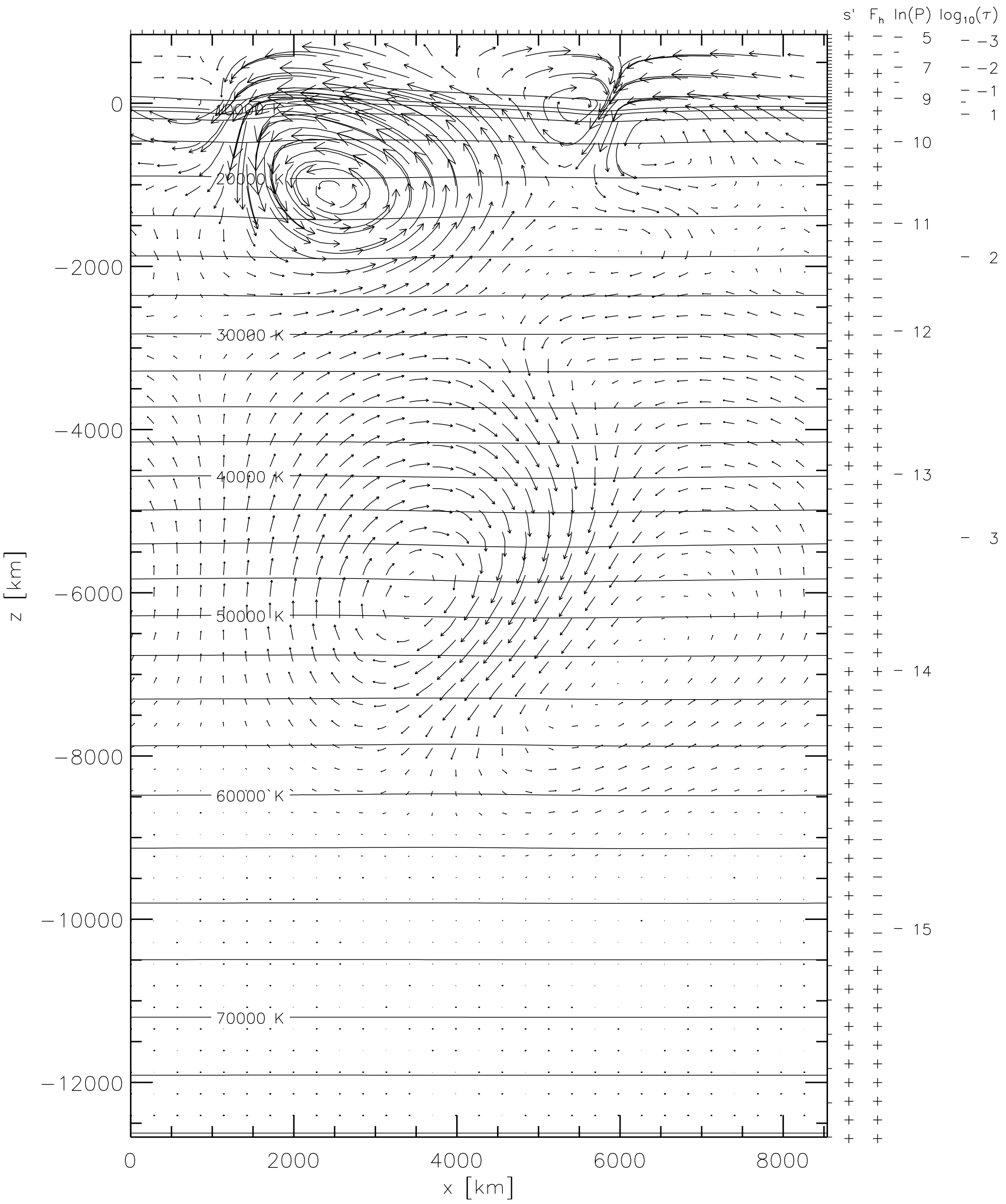


Abbildung 29: Strömungsbild eines A-Sterns (AT85g44N2) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\mathrm{K}$, $\log g = 4.40$, $v_{\max} = 11.2\,\mathrm{km/s}$, $t_{\text{int}} = 200\,\mathrm{s}$, geschlossenem Boden, offenem Deckel. Dieser Stern besitzt zwei konvektiv instabile Zonen ($s' < 0$), die etwas kleiner sind als die Gebiete mit positivem Enthalpiefluß ($F_h > 0$). Eingerahmt sind diese Konvektionszonen von Overshoot-Gebieten mit negativem Enthalpiefluß ($F_h < 0$). Am Boden geht der Fluß gegen Null, d.h. die positiven Vorzeichen des Enthalpieflusses bedeuten nicht, daß dort noch eine Konvektionszone existiert. Die Ausläufer der Strömungswirbel beider Konvektionszonen überlappen sich, so daß die konvektiv stabile Zone zwischen ihnen vollständig durchmischt wird.

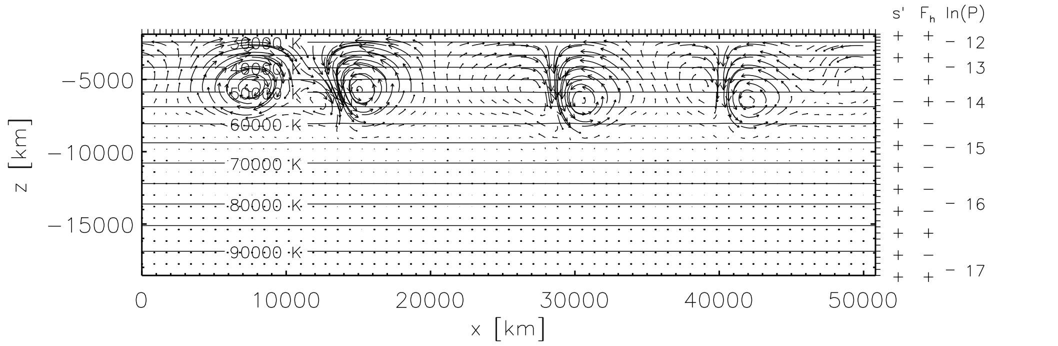


Abbildung 30: Strömungsbild eines A-Sterns (AT85g44N03) mit $T_{\mathrm{eff}} = 8500\,\mathrm{K}$, $\log g = 4.40$, $v_{\max} = 3.14\,\mathrm{km/s}$, $t_{\mathrm{int}} = 1500\,\mathrm{s}$, geschlossenem Boden und Deckel. Dieses Modell besitzt die gleichen Parameter wie das Modell AT85g44N2 (siehe Abbildung 29), umfaßt aber nur die untere Heliumkonvektionszone und besitzt dafür eine wesentlich größere horizontale Ausdehnung. Der Enthalpiefluß F_h geht im unteren Teil des Modells schnell gegen Null. Hier wird sein Vorzeichen also schon von kleinsten numerischen Störungen beeinflußt.

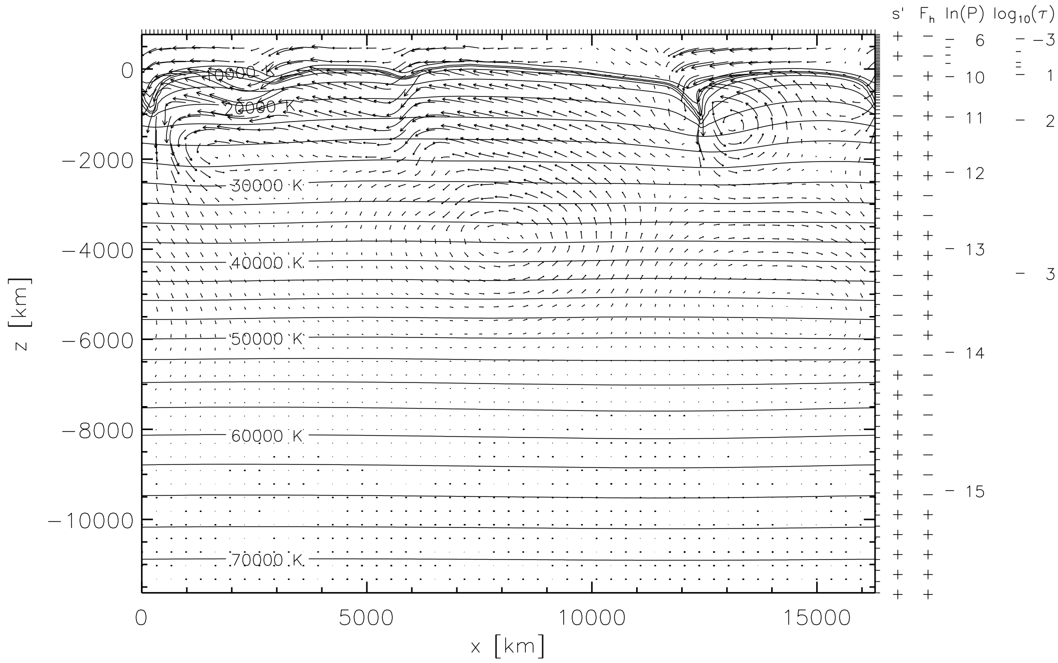


Abbildung 31: Strömungsbild eines A-Sterns (AT80g44N5) mit $T_{\mathrm{eff}} = 8000\,\mathrm{K}$, $\log g = 4.40$, $v_{\max} = 20.0\,\mathrm{km/s}$, $t_{\mathrm{int}} = 50\,\mathrm{s}$, geschlossenem Boden, offenem Deckel. Das Modellvolumen enthält 2 Konvektionszonen. Aber nach nur 3000 sec Simulationszeit hat die untere noch keinen statistisch stationären Zustand erreicht. Vom zu kleinen Vorgängermodell hat dieser Lauf die hohen nach links gerichteten Horizontalgeschwindigkeiten im oberen Teil geerbt, d.h. die Jets oben laufen alle nach links.

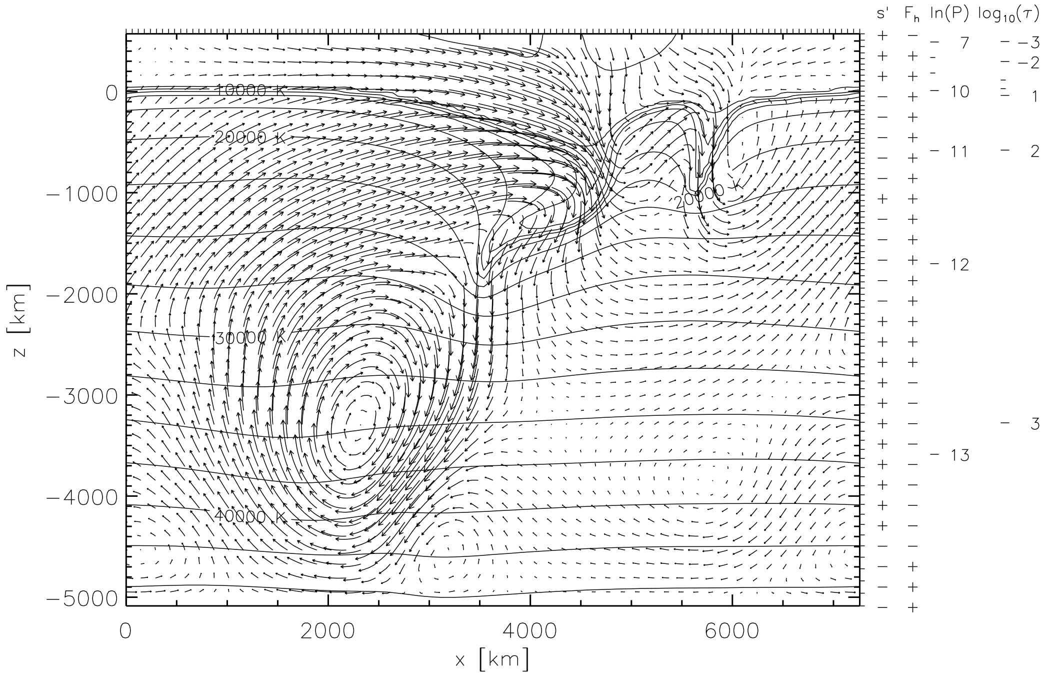


Abbildung 32: Strömungsbild eines A-Sterns (AT75g44N3) mit $T_{\text{eff}} = 7500\,\text{K}$, $\log g = 4.40$, $v_{\max} = 19.7\,\text{km/s}$, $t_{\text{int}} = 25\,\text{s}$, geschlossenem Boden, offenem Deckel. Die Mach-Zahl in dem linken, größeren Abströmkanal und in der Photosphäre erreicht stellenweise den Wert 2. In diesem Kanal werden die Temperatur-Isolinien tief nach unten mitgerissen, ohne daß der Temperatursprung zerstört wird.

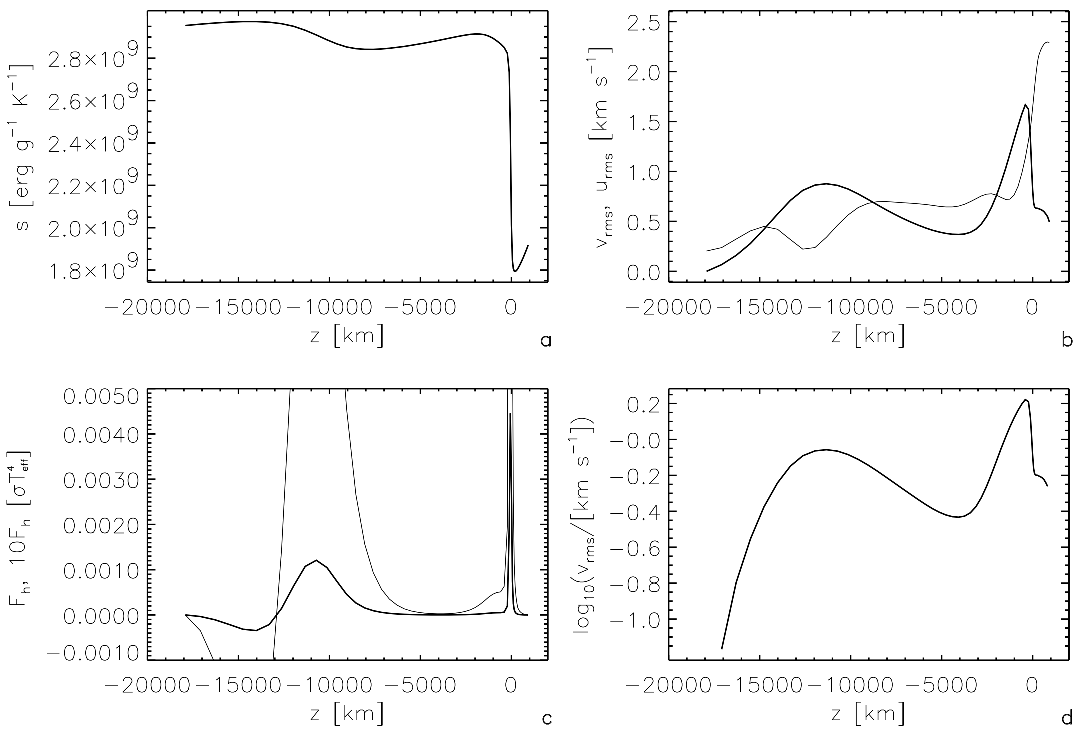


Abbildung 33: Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit (A-Stern (AT85g41N3) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$, $\log g = 4.13$, grauen Opazitäten).

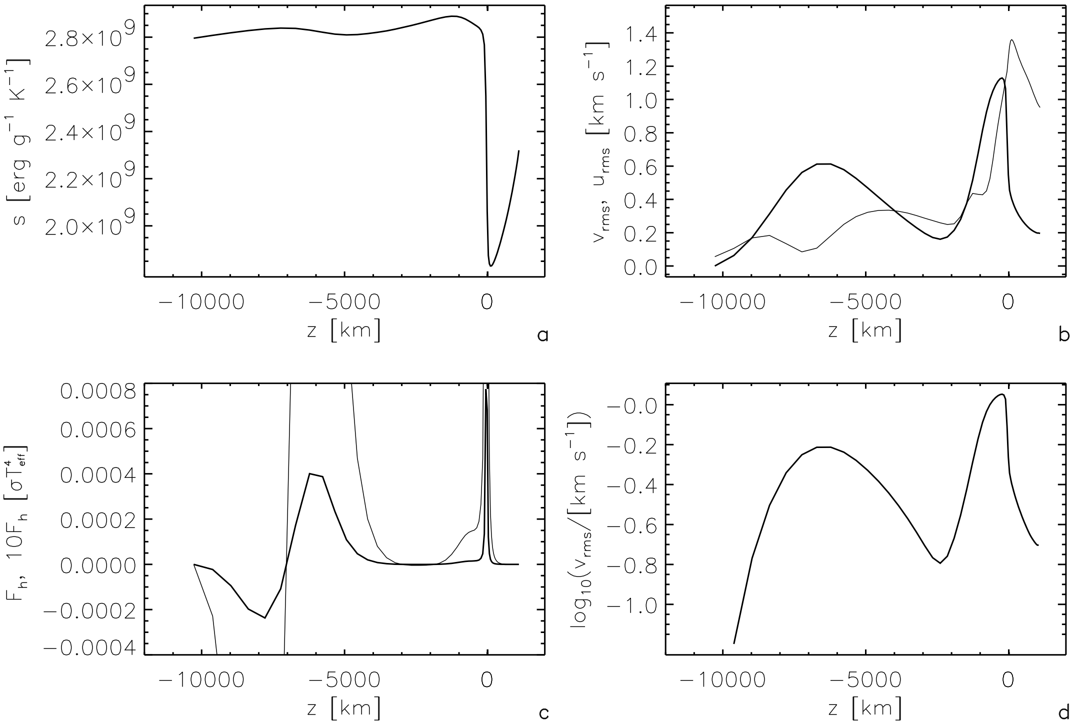


Abbildung 34: Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit (A-Stern (AT90g44N1) mit $T_{\text{eff}} = 9000\,\text{K}$, $\log g = 4.40$, grauen Opazitäten).

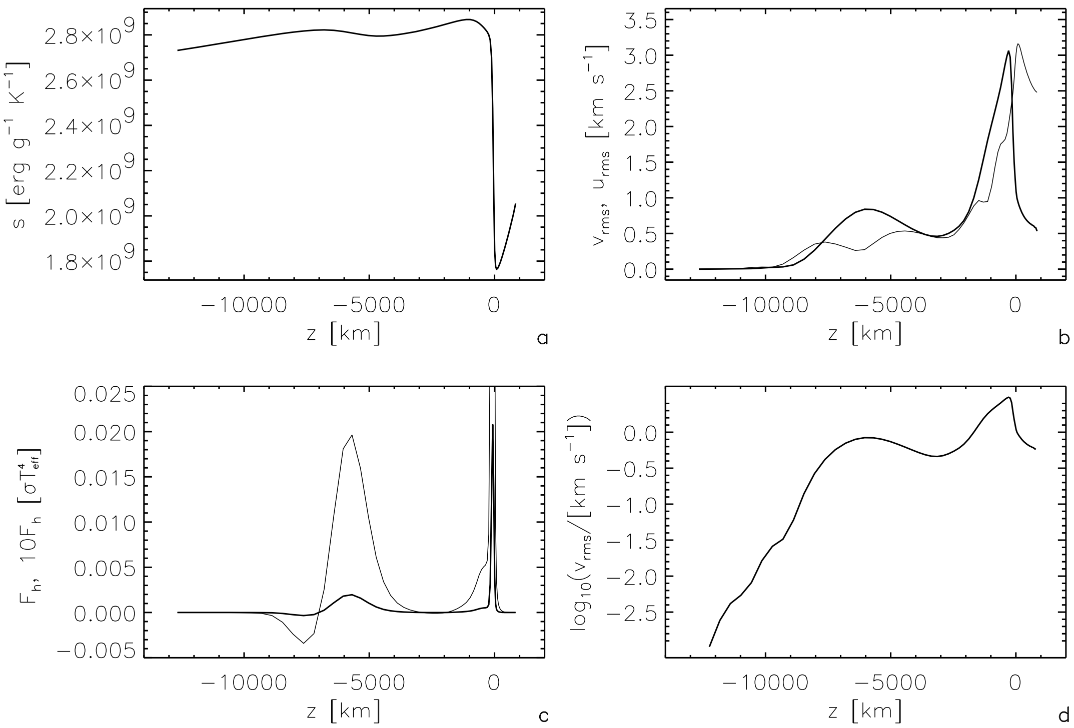


Abbildung 35: Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit (A-Stern (AT85g44N2) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$, $\log g = 4.40$, grauen Opazitäten).

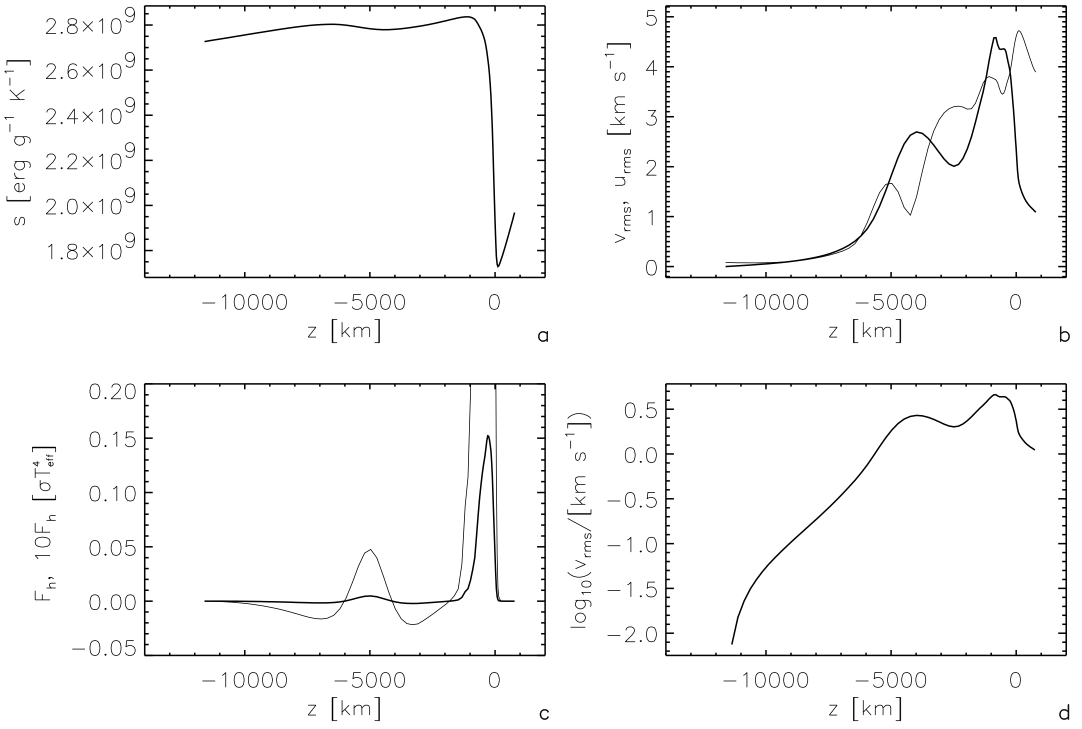


Abbildung 36: Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit (A-Stern (AT80g44N5) mit $T_{\text{eff}} = 8000\,\text{K}$, $\log g = 4.40$, grauen Opazitäten).

Mittelung der zu extrahierenden Größen zu erhalten. Die typischerweise schallschnellen Strömungen in einem Gebiet mit kleiner Gitterweite in der oberen Konvektionszone erfordern einen kleinen numerischen Zeitschritt. Zusammengenommen heißt das, daß sehr viele Zeitschritte gerechnet werden müssen.

Die A-Stern-Modelle wurden noch mit älteren nicht so stabilen und schnellen Programmversionen gerechnet. Außerdem standen erst für die letzten Modelle die leistungsfähigen Berliner Rechner zur Verfügung, was zur Folge hat, daß die eben aufgezählten Forderungen an die Simulationsrechnungen bei keinem A-Stern-Modell alle gleichzeitig erfüllt werden konnten. So weicht das Gitter-Seitenverhältnis in einigen Modellen doch stellenweise sehr von Eins ab (siehe die Abbildungen 27 und 28). Die Modelle, die beide Konvektionszonen enthalten, haben keine genügend große Ausdehnung, um in der unteren Zone mehr als eine Zelle zu erlauben. Und bei fast allen Modellen könnten die Simulationszeiten größer sein, um die statistische Sicherheit bei der Mittelung zu erhöhen.

Andererseits habe ich für alle $T_{\text{eff}}/\log g$-Werte mehrere Rechnungen mit teilweise verschiedenen Modellvolumina, Gittern, numerischen Parametern usw. durchgeführt. Dadurch sind die Ergebnisse der oben vorgestellten Modelle immerhin leidlich abgesichert und können trotz der Kritikpunkte mit einem gewissen Vertrauen akzeptiert werden, wenn man nur jeweils bedenkt, daß die Unsicherheit bei konkreten Daten größer ist als bei den Simulationen der Konvektionszone Weißer Zwerge.

7 Abhängigkeit der Ergebnisse von numerischen Parametern

Zwar enthalten die Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen nicht wie die Mischungswegtheorie einen freien Parameter, mit dem sich die Stärke der Konvektion beliebig einstellen ließe. Dafür gibt es bei jeder Rechnung eine Reihe von Voreinstellungen, die über die Vorgabe der physikalischen Parameter Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung und chemische Zusammensetzung hinausgehen und die Ergebnisse in der einen oder anderen Weise beeinflussen können. Diese Einstellungen geben zumeist an, in welcher Weise die eine oder andere der zahlreichen notwendigen Näherungen genau durchgeführt wird. Dazu gehören Angaben über das Gitter, das Modellvolumen, die numerischen Viskositätsparameter, Opazitätstabellen usw.

Leider ist es nicht möglich, alle Näherungen durch Variation bestimmter Programmparameter zu testen. Zu den einschränkenden Annahmen, deren Auswirkungen man vor allem gerne ermitteln würde, gehört die Restriktion auf zwei Dimensionen. Es ist klar, daß die Simulationen eigentlich auf einem dreidimensionalen Gitter durchgeführt werden müßten, um die Topologie solarer Granulation oder die Ankopplung der Konvektionszellen an Turbulenzelemente korrekt wiederzugeben. Aber leider besitzt das Programm keinen Parameter, mit dem einfach zwischen einem 2D- und einem 3D-Gitter umgeschaltet werden könnte, und so ist man auf Untersuchungen anderer Autoren angewiesen. Vergleichende Untersuchungen zwei- und dreidimensionaler turbulenter stellarer Konvektion gibt es kaum. Eine Ausnahme ist die Arbeit von Müller (1993) über „Two- and Three-Dimensional Simulations of Convection in Protoneutron Stars“. Dieses System besitzt mit unserem immerhin eine gewisse Verwandtschaft, und so läßt sich sein Schluß, daß 2D-Rechnungen die horizontalen Ausdehnungen der Zellen und damit auch die Overshoot-Tiefe etwas überschätzen, mit gebotener Vorsicht auf unsere Verhältnisse übertragen. Zwischen den Resultaten der zwei- und dreidimensionalen Simulationen von Müller gibt es zwar einen gewissen quantitativen Unterschied in den räumlichen Skalen, aber die Konvektion zeigt keine qualitativen Unterschiede.

Eine andere Möglichkeit ist der Vergleich der Kieler 2D-Simulationen der Sonne mit den 3D-Simulationen von Nordlund und Stein (Steffen 1991). Z.B. findet sich die in Rast et al. (1993, Abbildung 5) gezeigte Sequenz der Entstehung eines kühlen Abströmgebietes während einer 3D-Simulation in praktisch der gleichen Form auch in den 2D-Rechnungen von Matthias Steffen. Aber in Steffens Modellen finden sich gelegentlich größere Granulen, als sie auf der Sonne beobachtet werden, und durch die zweidimensionale Geometrie scheinen die Horizontalgeschwindigkeiten etwas überschätzt zu werden (private Mitteilung).

Aufgrund dieser wenn auch nicht sehr detaillierten Vergleiche erwarte ich einen gewissen quantitativen Fehler (insbesondere eine leichte Überschätzung der horizontalen Skalen und der Overshoot-Tiefe) durch die Restriktion auf zwei Dimensionen, nehme aber an, daß sich in dreidimensionalen Rechnungen bezüglich gemittelter Schichtungen usw. qualitativ nichts ändern würde. Dafür bieten zweidimensionale Rechnungen den Vorteil, daß ohne allzu großen Aufwand eine Reihe von Simulationsläufen mit unterschiedlichen Parametern durchgeführt werden können. Nur so ist es möglich, Einblick in das Verhalten der verschiedenen Modelle zu gewinnen.

Der zweite wichtige Punkt, den man gern näher untersuchen würde, ist der Einfluß des Gitters. Eigentlich müßte man für jeden Stern, dessen Oberflächenkonvektion simuliert werden soll, eine ganze Reihe von Modellen rechnen, die jeweils ein immer feineres Gitter besitzen. Dann könnte man die Abhängigkeit wichtiger makroskopischer Größen wie mittlerer Temperaturschichtung, rms-Wert der Geschwindigkeit usw. von der Gitterweite analysieren und abschätzen, was beim Grenzübergang $\Delta x, \Delta z \to 0$ geschieht. Dieses Verfahren ist aber für unsere Modelle zur Zeit völlig illusorisch, da der Rechenaufwand mit mindestens $(1/\Delta x)^3$ wächst, und ein durchschnittlicher Simulationslauf für ein Modell eines Weißen Zwerges mit dem Standard-Gitter schon knapp 100 CPU-Stunden auf einer Cray erfordert.

Nichtsdestoweniger wurden aber Rechnungen mit unterschiedlichen Gittern durchgeführt, um wenigstens eine grobe Abschätzung für die Auswirkung einer solchen Variation zu erhalten. Ein Beispiel ist das Paar der A-Stern-Modelle AT85g41N3 und AT85g41N7 (siehe Tabelle 8). Das erste umfaßt beide Konvektionszonen, das zweite nur die obere, dafür aber mit höherer Gitterauflösung. Die Konvektion ist in diesen Modellen noch so schwach, daß die Schichtung noch praktisch radiativ ist und sich in beiden Läufen nicht unterscheidet (siehe den Verlauf der Entropie in Abb. 37a). Aber auch der Verlauf der Enthalpieflüsse ist praktisch identisch (Abb. 37c). Die rms-Werte der Vertikalgeschwindigkeit differieren nur in dem Bereich zwischen den beiden Konvektionszonen, der im tiefen Modell vom Overshoot der unteren Konvektionszone erreicht wird, die im flachen Modell weggeschnitten wurde (Abb. 37b und d). Die deutlichste Abweichung gibt es im rms-Wert der Horizontalgeschwindigkeit dicht unterhalb des Deckels (Abb. 37b).

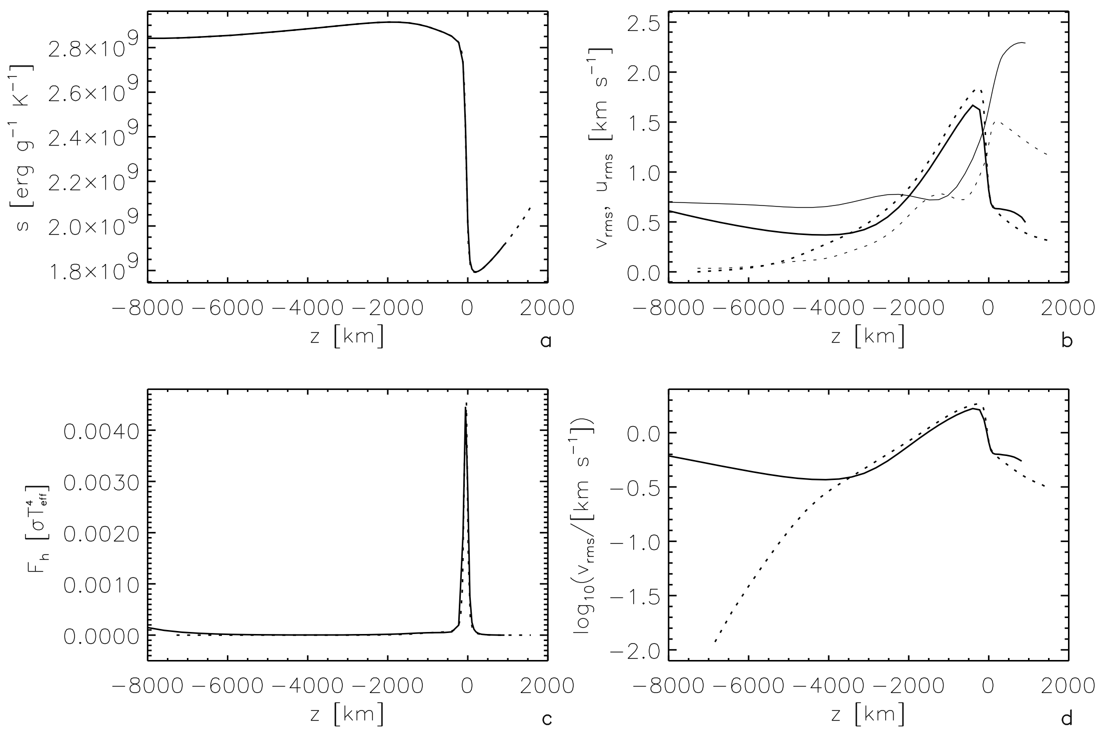


Abbildung 37: Vergleich von Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit zweier A-Stern-Modelle (durchgezogene Linien: AT85g41N3, tiefes, breites Modell; gepunktete Linien: AT85g41N7, flaches, schmales Modell) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$, $\log g = 4.13$, grauen Opazitäten.

Im eben beschriebenen Modell wurde nicht nur die Auflösung sondern auch das Modellvolumen verändert. Das ist jedoch in dem Modellpaar von Ludwig et al. (1994) nicht der Fall. Dort werden zwei Modelle Weißer Zwerge vom Typ DA verglichen, die sich nur dadurch unterscheiden, daß bei dem einen die horizontale Gitterauflösung verdoppelt wurde. Die Gegenüberstellung der Enthalpieflüsse (Ludwig et al. 1994, Abb. 4) zeigt, daß dieser Fluß beim Modell mit der höheren Auflösung geringfügig höher ist, was aber praktisch völlig durch den ebenfalls etwas größeren (negativen) Fluß kinetischer Energie ausgeglichen wird. Die Autoren kommen zu dem Schluß, daß die verwendete Auflösung des groben Modells voll ausreicht, und ich habe in meinen Simulationen Weißer Zwerge die gleiche horizontale Auflösung und Modellausdehnung verwendet (Das vertikale Gitter und die Modellhöhe wurden jedoch den Erfordernissen bei anderen Effektivtemperaturen angepaßt).

Der Einfluß unterschiedlicher horizontaler Ausdehnung soll am Beispiel der drei A-Stern-Modelle AT85g44N2, AT85g44N8 und AT85g44N01 studiert werden (siehe Tabelle 9). Das erste umfaßt beide Konvektionszonen, ist aber nur 8400 km breit. Das zweite enthält nur die untere, besitzt aber die dreifache Breite, wenn auch die gleiche horizontale Gitterpunktzahl. Beim dritten wurden die horizontale Ausdehnung und auch die horizontale Gitterpunktzahl nochmals verdoppelt. Mittlerer Entropie-, Enthalpiefluß- und Geschwindigkeitsverlauf der beiden tiefen Modelle sind praktisch identisch (siehe die gepunkteten und die gestrichelten Linien in Abbildung 38). Daß die beiden Datensätze nicht völlig gleich sind, sieht man nur an der kleinen Differenz der rms-Werte der Horizontalgeschwindigkeit dicht unter dem Deckel (Abb. 38b). Daß die Übereinstimmung mit dem Modell AT85g44N2 deutlich geringer ist, liegt neben der unterschiedlichen horizontalen und vertikalen Ausdehnung und den verschiedenen Gittern vor allem am extrem kurzen Zeitraum, über die die Daten beim Modell AT85g44N2 gemittelt wurden. Die Simulationszeit ist einfach zu gering, als daß die Konvektion in diesem Modell einen statistisch stationären Zustand erreicht haben und man eine gesicherte Mittelung durchführen könnte. Immerhin ist die Übereinstimmung noch so gut, daß man annehmen kann, daß das Strömungsbild 29 einen einigermaßen repräsentativen Schnappschuß für die Strömungen in einem System aus zwei Konvektionszonen darstellt.

Ludwig et al. (1994) vergleichen 4 Modelle der Konvektionszonen Weißer Zwerge mit unterschiedlicher horizontaler Ausdehnung und kommen zu dem Schluß, daß ab einer gewissen Mindestmodellbreite, die die Ausbildung mehrerer gleichzeitig vorliegender Abströmgebiete erlaubt, die Ergebnisse von der Modellbreite unabhängig werden. Die dort vorgeschlagene Breite habe ich auch in meinen Simulationen beibehalten.

Während ich mich bei den Modellen Weißer Zwerge bei der horizontalen Ausdehnung auf der sicheren Seite wähne, meine ich, daß man die Modelle der kühleren A-Sterne noch verbreitern müßte, um die Entstehung mehr als eines tiefen Abströmgebietes zu erlauben. Die Abbildung 32, die einen dominierenden Jet zeigt, kurz bevor er einen kleineren „verschluckt", ist insofern nicht ganz typisch für diesen Lauf. Oft befindet sich nur ein Abströmgebiet im Simulationsvolumen.

Der Einfluß unterschiedlicher vertikaler Ausdehnung konnte schon am Beispiel der A-Stern-Modelle AT85g41N3 und AT85g41N7 (Bild 37) studiert werden. In einigen Modellen von Hauptreihen-A-Sternen gibt es einen Effekt, der bei der Reduktion der Modelltiefe auf die Schichten in der Umgebung der oberen Konvektionszone auftritt. Solche Modelle neigen dazu, langsam anwachsende planparallele Schwingungen (p-Moden) zu zeigen, die auch in eindimensionalen Modellen auftreten und deshalb mit Konvektion direkt nichts zu tun haben.

Ludwig et al. (1994) finden, daß eine gewisse Mindesttiefe, die allerdings wesentlich größer ist, als sie von der Mischungswegtheorie vorausgesagt wird, nötig ist, um eine komplette Konvektionszone im Modell einzuschließen. In Abbildung 39 erkennt man, daß eine weitere Ausdehnung über diese Mindesttiefe hinaus außer in unmittelbarer Nähe des Modellbodens keine Wirkung auf die eigentliche Konvektionszone zeigt.

Grundsätzlich hängen alle Simulationsläufe außer von vorgegebenen stellaren Parametern wie Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung und chemischer Zusammen-

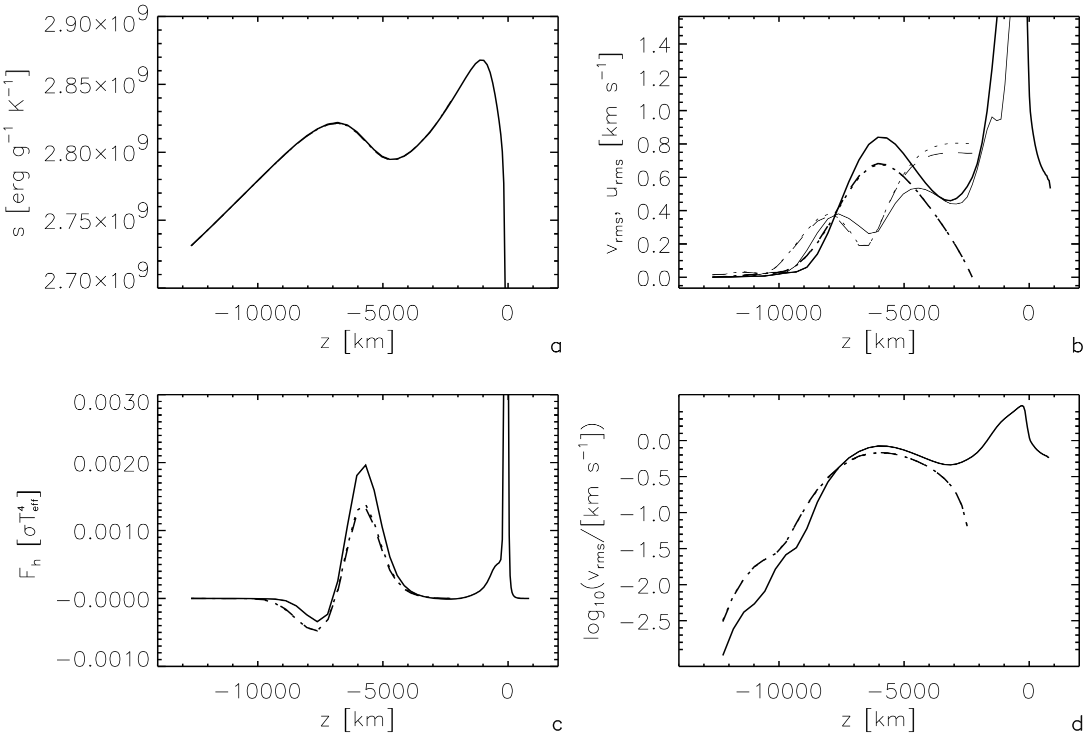


Abbildung 38: Vergleich von Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit dreier A-Stern-Modelle (durchgezogene Linien: AT85g44N2, beide Konvektionszonen; gepunktete Linien: AT85g44N8, nur Helium-Konvektionszone; gestrichelte Linien: AT85g44N01, nur Helium-Konvektionszone, sehr breit) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$, $\log g = 4.40$, grauen Opazitäten.

setzung natürlich auch von der gewählten Anfangsbedingung ab. Zeitlich und räumlich gemittelte Größen sollten von ihr aber unabhängig und möglichst nur eine Funktion der vorgegebenen physikalischen Parameter sein. Hier kommt einem die chaotische Natur dieses hochgradig nichtlinearen Systems zugute. Auch wenn sich zwei Anfangsmodelle nur geringfügig unterscheiden, werden diese Differenzen mit der Zeit exponentiell wachsen, bis sich die Strömungsmuster völlig auseinanderentwickelt haben (siehe Steffen und Freytag 1995). Diese empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen führt dazu, daß man langfristig keine genauen Aussagen treffen kann, wie sich ein gegebenes System entwickeln wird. Andererseits sorgt dieses exponentielle Anwachsen kleiner Differenzen aber auch dafür, daß unabhängig von den Anfangsbedingungen jedes Modell den zur Verfügung stehenden Phasenraum (die Menge aller möglichen Zustände des Systems) repräsentativ abdeckt (wenn es auch nicht annähernd möglich ist, daß alle Konfigurationen tatsächlich angenommen werden). Ist die Simulationszeit also größer als die Zeitspanne, die das System braucht, um voll entwickelte Konvektion auszubilden, dann sind gemittelte Größen tatsächlich unabhängig von der genauen Anfangsbedingung.

Die Zeiträume, über die diese Mittelung stattfindet, müssen natürlich endlich sein, was eine gewisse statistische Unsicherheit mit sich bringt. Die Größe dieser Unsicherheit hängt von der Länge des Mittelungszeitraums im Verhältnis zur dynamischen Zeitskala des Modells und von der Größe der Fluktuationen der betrachteten Variablen ab, d.h. sie ist nicht in allen Modellen einheitlich. Als Beispiel habe ich ein Modell eines Weißen Zwerges ausgesucht, das mit 11600 K schon recht kühl ist und eine effektive Konvektion mit großen Fluktuationen zeigt. Auch das Anfangsmodell war schon recht

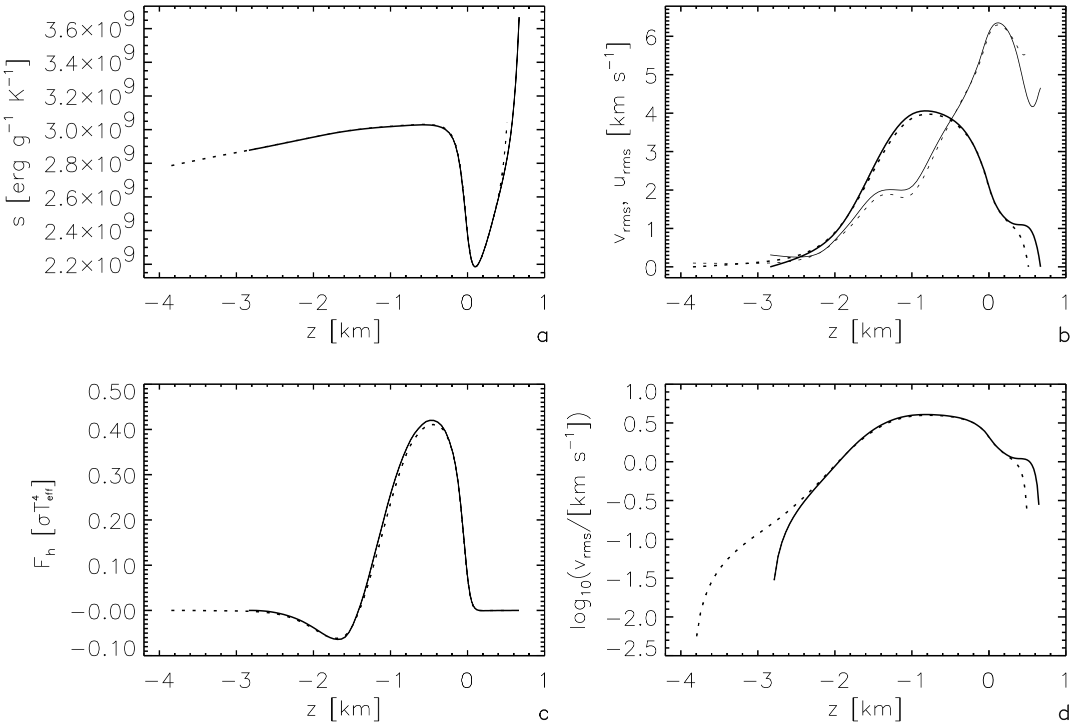


Abbildung 39: Vergleich von Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit zweier Modelle von Weißen Zwergen vom Typ DA (durchgezogene Linien: ZT120g80N1, flaches Modell; gepunktete Linien: ZT120g80N4, tiefes Modell) mit $T_{\rm eff} = 12000\,$K, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten.

gut relaxiert. In der Abbildung 40 sind die Größen Entropie, rms-Wert von Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit und Enthalpiefluß, die jeweils über die vier Viertel der Simulationszeit gemittelt wurden, dargestellt. Für die weitere Auswertung wird dann das zeitliche Mittel über die zweite Hälfte des Laufes verwendet. Man sieht in Abbildung 40c insbesondere, daß bei diesem Modell der Punkt, an dem der Enthalpiefluß sein Vorzeichen wechselt (bei etwa $z = -2\,$km), mit der Zeit kaum schwankt. Probleme können aber bei der genauen Festlegung der unteren Grenze der instabilen Schicht entstehen. Wie man in Abbildung 40a erkennt, ist das zugehörige Maximum der Entropie sehr flach, und die Position dieses Maximums variiert etwas von Mittelungsintervall zu Mittelungsintervall.

Insgesamt sind die Fluktuationen zwar nicht verschwindend gering, aber sie lassen vermuten, daß das zeitliche Mittel über die zweite Hälfte des Laufes, das dann für die weitere Auswertung verwendet wird, mit genügender Sicherheit als repräsentativ auch für einen längeren Zeitraum angesehen werden kann.

Außer den geometrischen Vorgaben können die numerischen Viskositätsparameter den konvektiven Energietransport beeinflussen. Die Abbildung 41 verdeutlicht den Einfluß der turbulenten Prandtl-Zahl, die die Größe der Wärmeleitung durch nicht aufgelöste Turbulenzelemente bestimmt. Im Modell ZT118g80N4 besitzt sie den Standard-Wert für Weiße Zwerge von 0.5. Im Modell ZT118g80N5 wurde der Wert auf 1.0 erhöht, womit sich die turbulente Wärmeleitung um einen Faktor 2 verringern sollte. Dafür wächst der makroskopische Enthalpiefluß (Abb. 41c) etwas, und der Übergangspunkt zwischen positivem und negativem Fluß verlagert sich ein kleines Stück nach unten. Dies wird aber zum Teil wieder dadurch ausgeglichen, daß der Betrag des (negativen) kinetischen Energieflusses ebenfalls anwächst, so daß sich der Gesamtfluß bis auf das

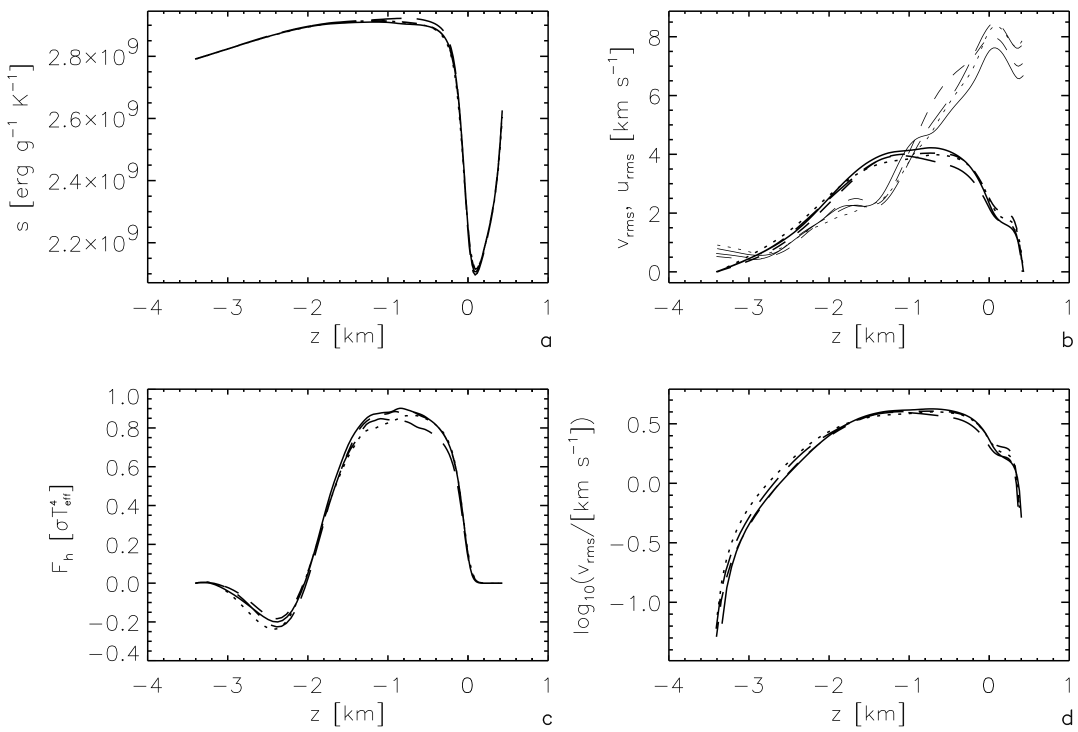


Abbildung 40: Vergleich von Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit in vier Mittelungszeiträumen eines Modells von Weißen Zwergen vom Typ DA (durchgezogene, gepunktete, gestrichelte, lang gestrichelte Linien: 1., 2., 3., 4. Viertel) mit $T_{\rm eff} = 11600$ K, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten.

tiefe Overshoot-Gebiet nur wenig verändert. Entropie- und Geschwindigkeitswerte variieren kaum merklich.

Bisher habe ich den Einfluß von Parametern untersucht, die im wesentlichen für den hydrodynamischen Teil des Programms zuständig sind. Wichtig ist jedoch auch der Strahlungstransportteil. Die Parameter, die die Anzahl und Winkelverteilung der Strahlen steuern, entlang derer die Strahlungstransportgleichung gelöst wird, sind von Matthias Steffen in Testsimulationen der solaren Konvektion variiert worden, und ich habe die Parameter, die sich als optimal bezüglich Genauigkeit und Rechengeschwindigkeit herausgestellt haben, übernommen.

Dafür mußten Parameter, die die Konvergenzgeschwindigkeit bei der Iteration zur Bestimmung des Strahlungsfeldes steuern, für viele A-Stern-Modelle individuell bestimmt werden. Ihre genauen Werte haben jedoch nur Einfluß auf die Effektivität des Programms, aber nicht auf die Ergebnisse. Die diesbezüglichen Einstellungen für die Modelle Weißer Zwerge sind wesentlich unkritischer.

Entscheidend für die korrekte Modellierung des Strahlungstransports in Sternhüllen ist neben der Verwendung eines geeigneten nichtlokalen Schemas die Benutzung realistischer Opazitäten. Die zuerst für die Modelle der heißeren Weißen Zwerge verwendeten Tabellen (zzceti1, siehe Abschnitt 2.4) enthielten noch nicht den Beitrag von den Absorptions-Features von Wasserstoff. Deshalb wurden mir später von Hans-Günter Ludwig entsprechend modifizierte Tabellen (davmf), die diese Features berücksichtigen, zur Verfügung gestellt. Der Einfluß dieser Änderung wird aus Abbildung 42 ersichtlich (vergleiche die durchgezogenen und die gepunkteten Linien). Die neuen Opazitätstabellen führen zu einer sichtbaren Verringerung des Enthalpieflusses. Auch die Tiefenerstreckung der Konvektionszone wird etwas geringer. Die Geschwindigkeit folgt

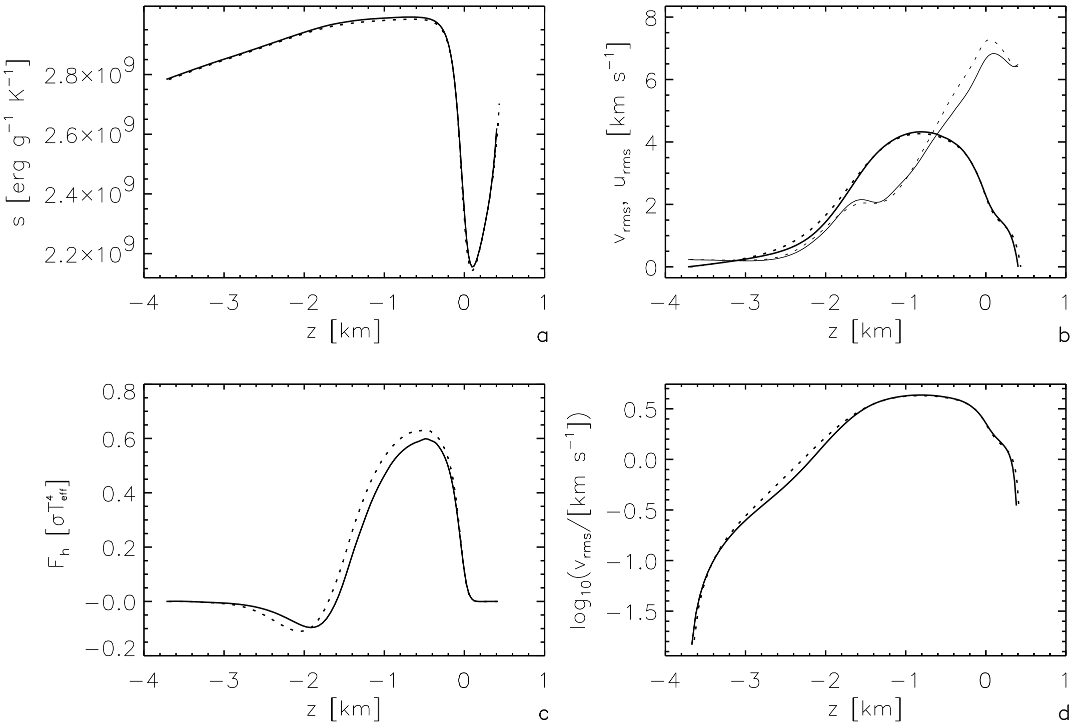


Abbildung 41: Vergleich von Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit zweier Modelle von Weißen Zwergen vom Typ DA (durchgezogene Linien: ZT118g80N4, turbulente Prandtl-Zahl: 0.5; gepunktete Linien: ZT118g80N5, turbulente Prandtl-Zahl: 1.0) mit $T_{\rm eff} = 11800\,\mathrm{K}$, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten.

ebenfalls diesem Trend. Die Entropieschichtung ist jedoch in diesen immer noch weitgehend radiativen Modellen kaum beeinflußt.

Diese beiden Simulationen wurden mit grauen Opazitätstabellen durchgeführt. Durch die Abbildung 42 wird der Unterschied zwischen dem grauen (gepunktete Linie) und dem Mehrbandschema (gestrichelte Linie) deutlich. Der Enthalpiefluß wächst wieder etwas an. Insgesamt wird die Struktur der Konvektionszone kaum beeinflußt. Dies gilt jedoch nicht für die photosphärische Temperaturschichtung. Durch die in der nichtgrauen Opazitätstabelle berücksichtigte Linienkühlung wird die Temperatur in der Photosphäre deutlich geringer. Insgesamt gilt

$$F_{\rm h,zzceti1,grey} > F_{\rm h,davmf,non-grey} > F_{\rm h,davmf,grey} \quad . \tag{7.1}$$

Für kühlere Modelle ist der Einfluß der Frequenzabhängigkeit der Opazitäten auf die Stärke der Konvektion weniger ausgeprägt (siehe Tabelle 10).

Ich habe insgesamt nur ein nichtgraues A-Stern-Modell gerechnet (Abb. 43). Hier scheint der Effekt der Frequenzabhängigkeit kleiner zu sein als bei den Weißen Zwergen und sich ausschließlich auf die Temperaturschichtung der Photosphäre zu beschränken, was aus der verminderten Entropie in der Photosphäre des nichtgrauen Modells in Abbildung 43a deutlich wird.

Wie man erkennt, gibt es zahlreiche Effekte, die zu kleinen Unsicherheiten in den Werten von z.B. maximalem Enthalpiefluß oder der genauen Begrenzung der Konvektionszone führen. Aber keiner ist im Rahmen der getesteten Bandbreite von möglichen Parametern in der Lage, die Dynamik oder die Stärke der Konvektion qualitativ zu verändern. Die meisten Fehlerquellen führen dazu, daß die Zuordnung von Effektivtemperatur zur Stärke der Konvektion mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist.

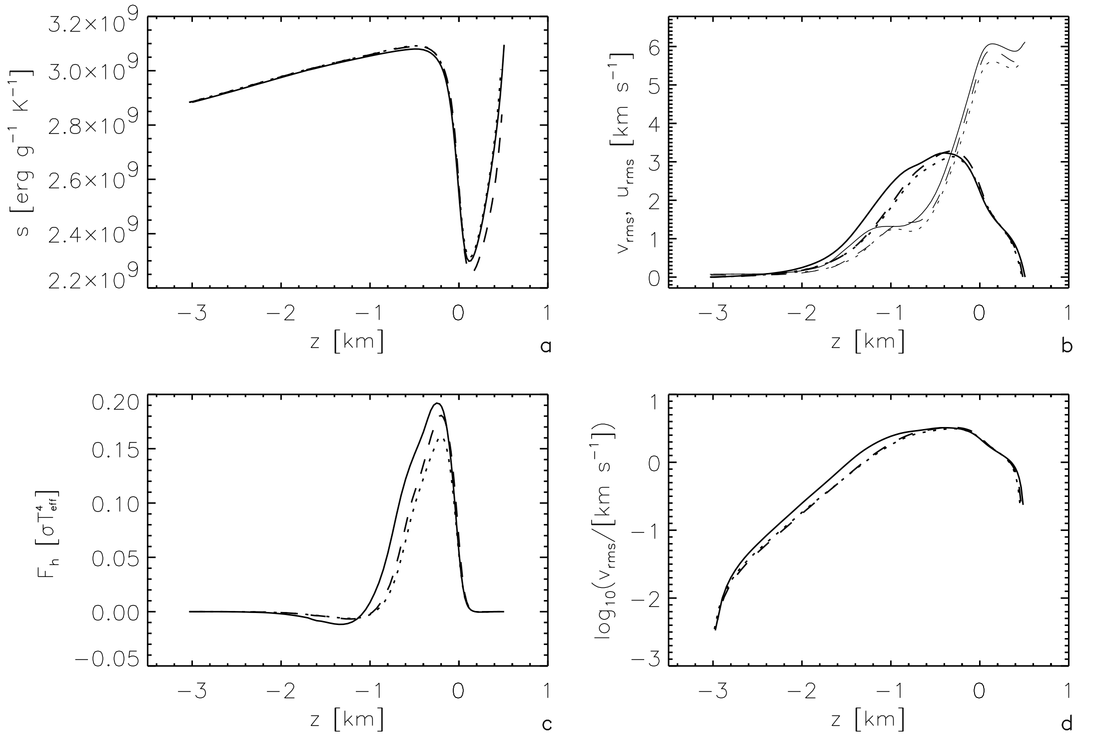


Abbildung 42: Vergleich von Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit dreier Modelle von Weißen Zwergen vom Typ DA (durchgezogene Linien: ZT126g80N1, graue Opazität (zzceti1), gepunktete Linien: ZT126g80N2, graue Opazität (davmf), gestrichelte Linien: ZT126g80N3, nichtgraue Opazität (davmf)) mit $T_{\text{eff}} = 12600\,\text{K}$, $\log g = 8.00$.

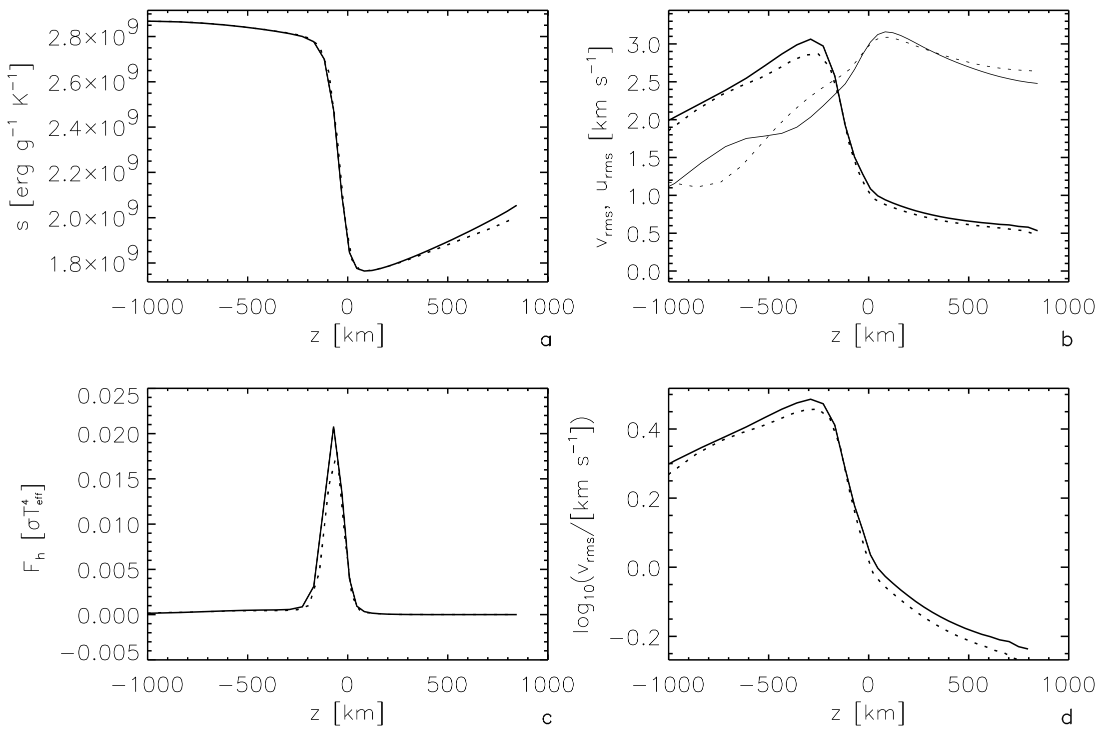


Abbildung 43: Vergleich von Entropie, Enthalpiefluß und Geschwindigkeit zweier A-Stern-Modelle (durchgezogene Linien: AT85g44N2, graue Opazität, gepunktete Linien: AT85g44N4, nichtgraue Opazität) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$, $\log g = 4.40$.

8 Dynamik der Konvektion: Zeit- und Größenskalen

8.1 Start einer Konvektionssimulation

Ein neuer Simulationslauf wird mit einem eventuell modifizierten Endmodell einer vorangegangenen Simulation oder, falls kein Modell mit einer geeigneten Anfangsschichtung zur Verfügung steht, mit einer hydrostatischen grauen Atmosphäre, die mit einer kleinen Störung des vertikalen Geschwindigkeitsfeldes (nach Formel (3.11)) versehen wurde, gestartet. Einen solchen Fall zeigt die Abbildung 44.

Die maximale Geschwindigkeit des Startmodells (bei $t = 0\,\mathrm{s}$, in der Sequenz 44 nicht gezeigt) beträgt 0.37 km/s. Die vertikale Amplitude der Störung hat ihr Maximum in der instabilen Schicht. Die Störung enthält sowohl kurz- als auch langwellige Anteile. Die kleinskaligen Beiträge werden zum Teil durch die numerische Viskosität sofort weggeglättet. Zum anderen ist ihre Anwachsrate wegen der auf den kleinen Skalen effektiven Strahlungsdämpfung so gering, daß sie sich nur extrem langsam entwickeln können. Die sehr großen Skalen erleiden zwar nur eine geringe Strahlungsdämpfung, aber ihre Anwachsrate ist trotzdem wegen des ungünstigen Seitenverhältnisses aus Wellenlänge und Tiefe der Konvektionszone klein (siehe Abschnitt 4 und Gl. (3.89)).

Im ersten Bild der Sequenz 44 bei $t = 0.04\,\mathrm{s}$ hat das Geschwindigkeitsfeld sich seine bevorzugten Skalen schon ausgesucht. Zwischen dem ersten und zweiten Zeitpunkt (von 0.04 s bis 0.1 s) steigt die Amplitude des Geschwindigkeitsfeldes auf das zehnfache, ohne daß sich seine Struktur nennenswert ändert. Das Feld ist im wesentlichen auf die instabile Zone beschränkt. Auf- und Abströmgebiete sind noch weitgehend symmetrisch. Daß sich die Geschwindigkeitspfeile in den Abströmgebieten konzentrieren, ist auf die Dichteschichtung zurückzuführen: Materie, die sich abwärts bewegt, wird komprimiert, und die anfangs gleichmäßig über das Modell verteilten Pfeile werden zusammengedrängt. Umgekehrt divergieren nach oben weisende Stromlinien.

Dieses lineare Regime, das von einem exponentiellen Wachstum geprägt wird, erreicht aber bald seine Grenze. Im dritten Schnappschuß (nach 0.2 s) liegt die Maximalgeschwindigkeit mit 15.7 km/s schon in der Nähe des Wertes von ca. 20 km/s, der für die voll entwickelte Konvektion dieses Modells typisch ist. Die Wachstumsgeschwindigkeit hat sich verlangsamt. Die ersten Abströmgebiete sind miteinander verschmolzen und haben tiefreichende Jets gebildet, die jetzt schon weit über die instabile Zone hinausgehen. Die hier schon deutliche Asymmetrie nimmt im vierten Bild noch weiter zu. Von den anfangs vorhandenen neun Abströmgebieten sind nur noch vier übriggeblieben, und ihre Anzahl wird sich im weiteren Verlauf auf einen typischen Wert von zwei reduzieren. Die schon auf den ersten Blick in vierten Bild der Sequenz 44 deutliche Asymmetrie in der Dichte der Pfeile ist jetzt nicht mehr allein auf den oben beschriebenen Schichtungseffekt zurückzuführen: Die Abströmkanäle nehmen jetzt einen deutlich kleineren Anteil am Modellvolumen ein als die Aufströmgebiete. Entsprechend ist dort die Geschwindigkeit wesentlich größer, und die abwärts zeigenden Pfeile sind entsprechend länger, so daß die Liniendichte in den Abströmkanälen groß wird.

Dieser Vorgang wird in einem realen Stern so natürlich nicht ablaufen können, denn dazu müßte es einen Mechanismus geben, der die Schichtung erst einmal stabil hält und der dann plötzlich „ausgeschaltet“ wird, um das Entstehen einer Konvektionszone aus der konvektiven Instabilität heraus zu ermöglichen. Nichtsdestoweniger ist dieser Vorgang aber interessant. Denn selbst bei voll ausgebildeter Konvektion gibt es zwischen den Abström-Jets Regionen mit relativ geringen Geschwindigkeiten. Hier kann die konvektive Instabilität dann praktisch ungestört wirken und aus einer zufälligen Anfangsstörung heraus ein neues Abströmgebiet produzieren (siehe Abschnitt 6).

Beim Übergang vom linearen zum nichtlinearen Regime wachsen die horizontale

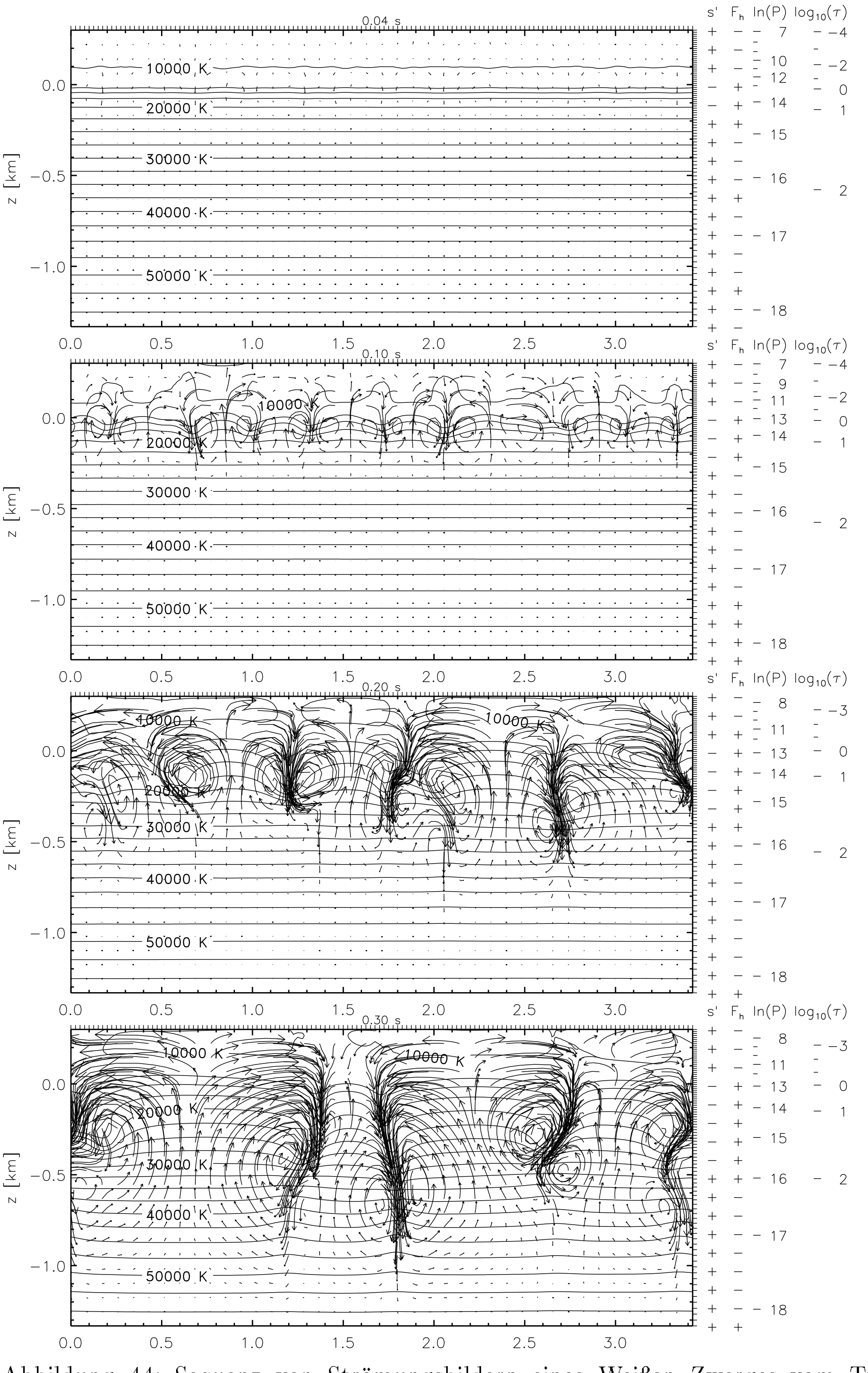


Abbildung 44: Sequenz von Strömungsbildern eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g83N1) mit $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$, $\log g = 8.30$, $v_{\max}(0.04\,{\rm s}, 0.1\,{\rm s}, 0.2\,{\rm s}, 0.3\,{\rm s}) = (0.56\,{\rm km/s}, 6.0\,{\rm km/s}, 15.7\,{\rm km/s}, 17.4\,{\rm km/s})$, $t_{\rm int} = 0.05\,{\rm s}$, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten.

Ausdehnung der Aufströmgebiete und die vertikale Tiefenerstreckung der Jets beträchtlich. Der *Durchmesser* der Jets bleibt jedoch ungefähr konstant. Das gilt insbesondere auch für die heißeren Modelle, für die ich diese Art der Anfangsbedingung gewählt habe. An diesen Modellen sieht man auch, daß die bevorzugte horizontale Skala nicht (oder nur unwesentlich) von der Gitterweite und damit von der numerischen Viskosität abhängt. Obwohl bei den drei Modellen (ZT134g80N1, ZT138g80N1 und ZT142g80N1) das Gitter, die numerische Viskosität und die Anfangsstörung praktisch identisch waren, wachsen die bevorzugten horizontalen Skalen mit T_{eff}. Das liegt am stärkeren Einfluß der Strahlungsdämpfung, die bei den heißesten Modellen größere Skalen als bei den kühlen beeinflussen kann (siehe Abb. 45).

8.2 Typische Größen- und Zeitskalen

Mit den Abbildungen 45 und 46 soll versucht werden, die globale Dynamik der Konvektion über einen ganzen Modellauf und nicht nur für einzelne Zeitpunkte darzustellen. Dazu habe ich für jedes der gezeigten Modelle eine Höhe z ausgewählt, für die ich die Vertikalgeschwindigkeit $v(x,t)$ für jeden horizontalen Gitterpunkt x und jeden Sampling-Zeitpunkt t in einem Graustufen-Plot aufgetragen habe. Die zeitliche Entwicklung verläuft von links nach rechts. Abströmgebiete sind dunkel, Aufströmregionen hell. Die Höhenpunkte liegen jeweils in der instabilen Schicht, wo die Vertikalgeschwindigkeit gut mit der Temperatur korreliert ist. Man kann die Helligkeit also auch mit gewisser Vorsicht als Maß für die Temperatur ansehen. Da die ausgewählten Schichten knapp unterhalb der Photosphäre liegen, stellen die Bilder also für einen festen Zeitpunkt in etwa dar, was man bei einem hypothetischen Blick von oben auf das Modellvolumen sehen würde. In der Modellsequenz 45 verringert sich die Effektivtemperatur der Modelle von oben nach unten. Dagegen wird in der Sequenz 46 die Schwerebeschleunigung variiert.

Betrachtet man als erstes die drei heißesten Modelle in Abbildung 45, die mit einer gestörten hydrostatischen Schichtung gestartet wurden, fallen die schnell abklingenden planparallelen Schwingungen auf, die sich als p-Moden entpuppen und durch kleine Abweichungen der Startatmosphäre vom exakten Druckgleichgewicht hervorgerufen werden.

Das anfängliche Wachsen der injizierten Störungen ist nicht sichtbar. Erst nach einer gewissen Zeit treten die Geschwindigkeitsinhomogenitäten zutage. Es bilden sich schmale Abströmgebiete, die horizontal advektiert werden, miteinander verschmelzen und insbesondere in der zeitlichen Entwicklung eine deutliche Asymmetrie zwischen breiten Auf- und schmalen Abströmgebieten erzeugen.

Die Modelle mit hohen Effektivtemperaturen verhalten sich untereinander recht ähnlich, wenn man von den deutlich unterschiedlichen Zeitskalen absieht. Insbesondere die Modelle ZT138g80n1 und ZT134g80n1, die mit einer praktisch identischen Anfangsstörung gestartet wurden, zeigen in den ersten Sekunden die gleiche Strömungstopologie, nur daß das kühlere Modell etwa zweimal so schnell läuft wie das heißere.

Ganz interessant ist nebenbei, daß sich das Strömungsmuster beim Modell ZT138g80n1 zumindest in der simulierten Zeitspanne fast periodisch wiederholt.

Mit abnehmender Effektivtemperatur wird die Horizontalbewegung immer schneller, bis bei etwa 12600 K ein Sättigungswert erreicht ist. Etwa ab dieser Marke steigen die Geschwindigkeiten kaum mehr an. Dafür treten nicht mehr mehrere gleichberechtigte Jets nebeneinander auf, sondern es gibt einen dominierenden, der alle weiteren nach kurzer Zeit in sich hineinsaugt.

Schließlich wird die Strömung immer turbulenter und der zeitliche Verlauf immer

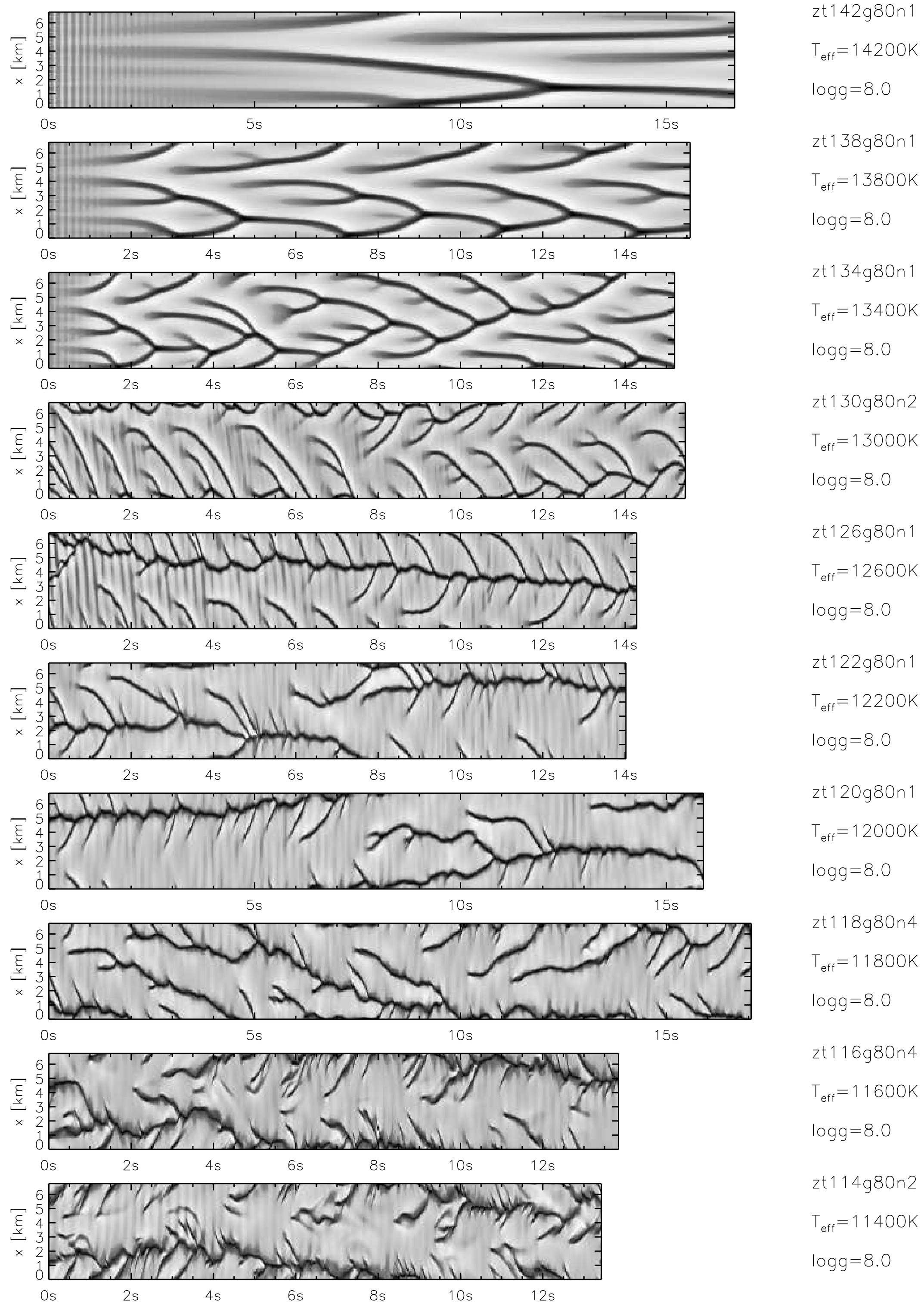


Abbildung 45: Sequenz von Geschwindigkeitsfeldern von Weißen Zwergen vom Typ DA (ZT142g80N1 bis ZT114g80N2) mit $T_{\mathrm{eff}} = 14200\,\mathrm{K} - 11400\,\mathrm{K}$, $\log g = 8.00$. Jedes Einzelbild zeigt für einen aus der jeweiligen instabilen Zone herausgegriffenen Höhenpunkt die Vertikalgeschwindigkeit (genauer $\mathrm{sign}\,(v)\,\sqrt{|v|}$) in Abhängigkeit von der Zeit t (Abszisse) und der Horizontalkoordinate x (Ordinate) als Graustufenplot. Helle Gebiete entsprechen Aufwärtsströmungen.

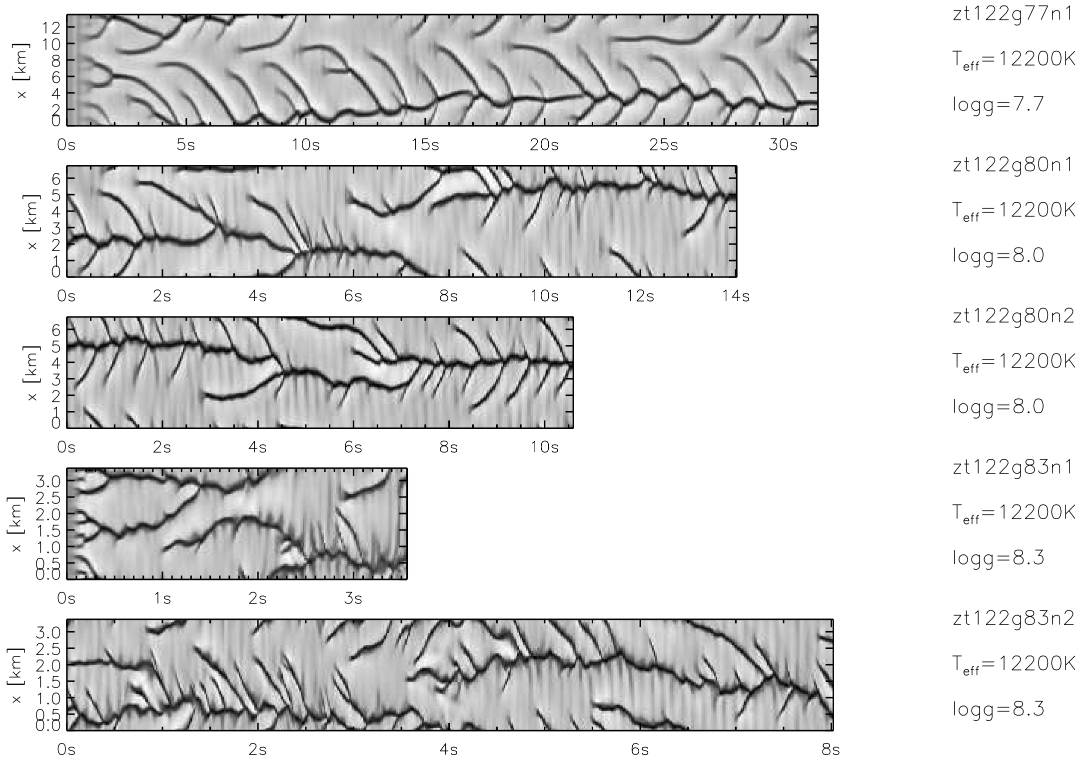


Abbildung 46: Sequenz von Geschwindigkeitsfeldern von Weißen Zwergen vom Typ DA (ZT122g77N1 bis ZT122g83N2) mit $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$, $\log g = 7.70 - 8.30$. Jedes Einzelbild zeigt für einen aus der jeweiligen instabilen Zone herausgegriffenen Höhenpunkt die Vertikalgeschwindigkeit (genauer $\text{sign}\,(v)\sqrt{|v|}$) in Abhängigkeit von der Zeit t (Abszisse) und der Horizontalkoordinate x (Ordinate) als Graustufenplot. Helle Gebiete entsprechen Aufwärtsströmungen.

irregulärer. Es gibt extrem kurzlebige kleine Abströmgebiete, die noch im „Embryonalstadium" von einem großen „gefressen" werden. Manchmal existieren aber auch zwei oder sogar drei große eine gewisse Zeit lang „friedlich" nebeneinader.

Im Modell ZT126g80N1 macht sich die f-Mode, die ihre große Anfangsamplitude noch vom Vorgängermodell übernommen hat, zu Beginn als laufende Welle durch schräge, fast senkrechte dunkle Streifen bemerkbar. Gegen Ende hat sie eine kleinere Amplitude und ist jetzt im wesentlichen eine stehende Welle. Auch in den meisten anderen Modellen wird diese Mode angeregt, wenn auch in dieser Darstellung nur schlecht sichtbar (siehe auch Abschnitt 10).

Besonders in den heißen Modellen mit recht regulären Strömungen erkennt man wieder, daß die hellsten Gebiete direkt neben den dunklen liegen, daß also die größten aufwärtsgerichteten Vertikalgeschwindigkeiten nicht etwa im Zentrum einer Granule, sondern bevorzugt direkt neben den Abströmkanälen liegen. Das ist keine optische Täuschung, wie man aus einem Plot der Vertikalgeschwindigkeit v über der Breite x in Bild 47 erkennt. Das Minimum und zugleich Betragsmaximum der Vertikalgeschwindigkeit v liegt im Zentrum eines Abströmkanals. Das Maximum liegt in direkter Nachbarschaft eines Jets und v klingt zu größeren Entfernungen hin ab. Wird die Vertikalgeschwindigkeit schließlich zu klein, kann die konvektive Instabilität ein neues Abströmgebiet produzieren. Dieser Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit ist keine spezielle Eigenart dieses einen Modells sondern eine *universelle Eigenschaft aller unserer Konvektionsmodelle* (Sonne, A-Sterne, Weiße Zwerge). In den turbulenteren Modellen mit effizienterer Konvektion wird diese Erscheinung nur von der chaotischeren Dynamik teilweise zugedeckt und tritt nicht immer offen zutage. Die lokalen Geschwindigkeitsmaxima rechts und links vom Jet müssen nicht symmetrisch sein. Oft dominiert die eine Seite. Dann hat man einen wandernden Jet, der im wesentlichen aus einem großen Wirbel besteht, der sich zur anderen Seite bewegt (siehe Abb. 47).

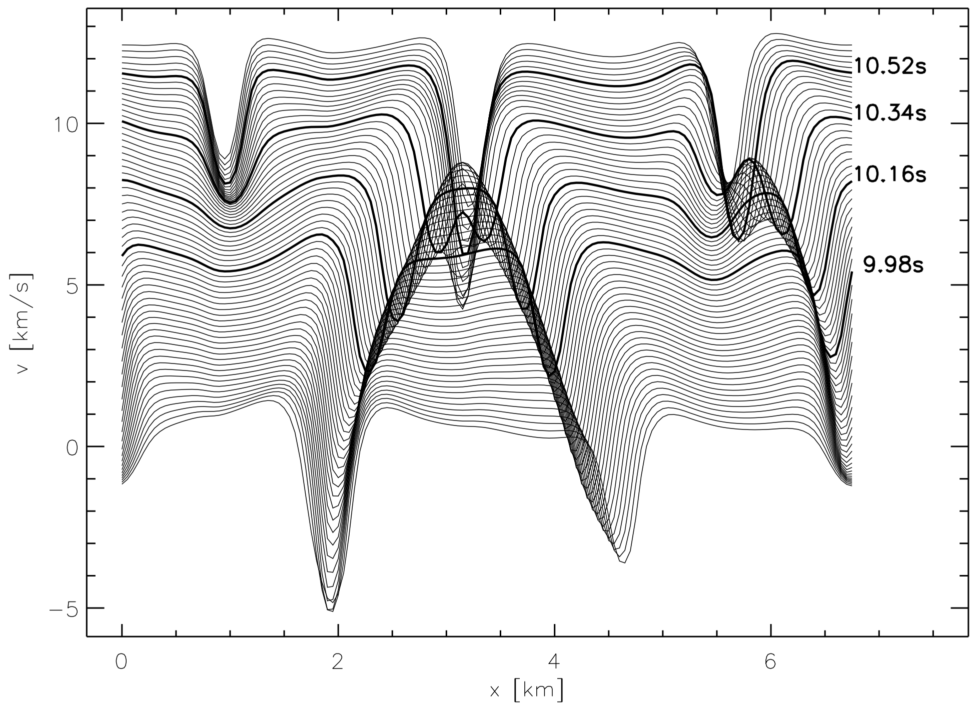


Abbildung 47: Vertikalgeschwindigkeit v über der Horizontalkoordinate x für einen festen Höhenpunkt z innerhalb der instabilen Schicht für einen Weißen Zwerg vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\text{eff}} = 13400\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, $F_{\text{h,max}} = 0.8\,\%$. Kurvenparameter ist die Zeit t. Die zeitliche Differenz zwischen zwei Kurven ist 0.02 s. Jede Linie wurde um 0.2 km/s gegenüber ihrer Vorgängerin nach oben verschoben. Die vier markierten dicken Kurven gehören zu den Schnappschüssen in Bild 17 und haben einen zeitlichen Abstand von 0.18 s. Die gewählte z-Koordinate ist die gleiche wie in Abbildung 45.

Ich habe versucht, die Veränderung in den Größen- und Zeitskalen der Konvektion auch quantitativ zu erfassen (siehe Abb. 48). Dazu wurden die Felder $v_z(x,t)$, die in Abbildung 45 dargestellt sind, durch Subtraktion des horizontalen Mittels und Glättung normalisiert. Gitterpunkte, an denen die Geschwindigkeit einen gewissen Schwellwert unterschreitet, wurden als Abströmgebiete identifiziert und markiert. Aus diesen Daten wurden dann Größen wie mittlere Anzahl von Abströmgebieten im Modell, mittlere Lebensdauer eines Abströmgebietes und relativer Flächenanteil der Abströmgebiete berechnet.

Diese Analysemethode funktioniert für die heißen regulären Modelle recht gut und wird mit zunehmendem Turbulenzgrad der Modelle unzuverlässiger. Hier hängen die Ergebnisse dann sehr von willkürlichen Parametern ab wie z.B. vom ausgewählten Höhenpunkt z, vom Geschwindigkeitsschwellwert, der nötig ist um kleinste Störungen und die Oszillationen zu eliminieren, oder von der für die Analyse ausgewählten Größe (v oder T) ab. Die Unzulänglichkeiten zeigen sich in den Schwankungen der extrahierten Größen für Modelle mit gleichen Parametern. Trotzdem sind gewisse Trends erkennbar.

Der Verlauf des mittleren Abstands zweier Abströmgebiete mit der Effektivtem-

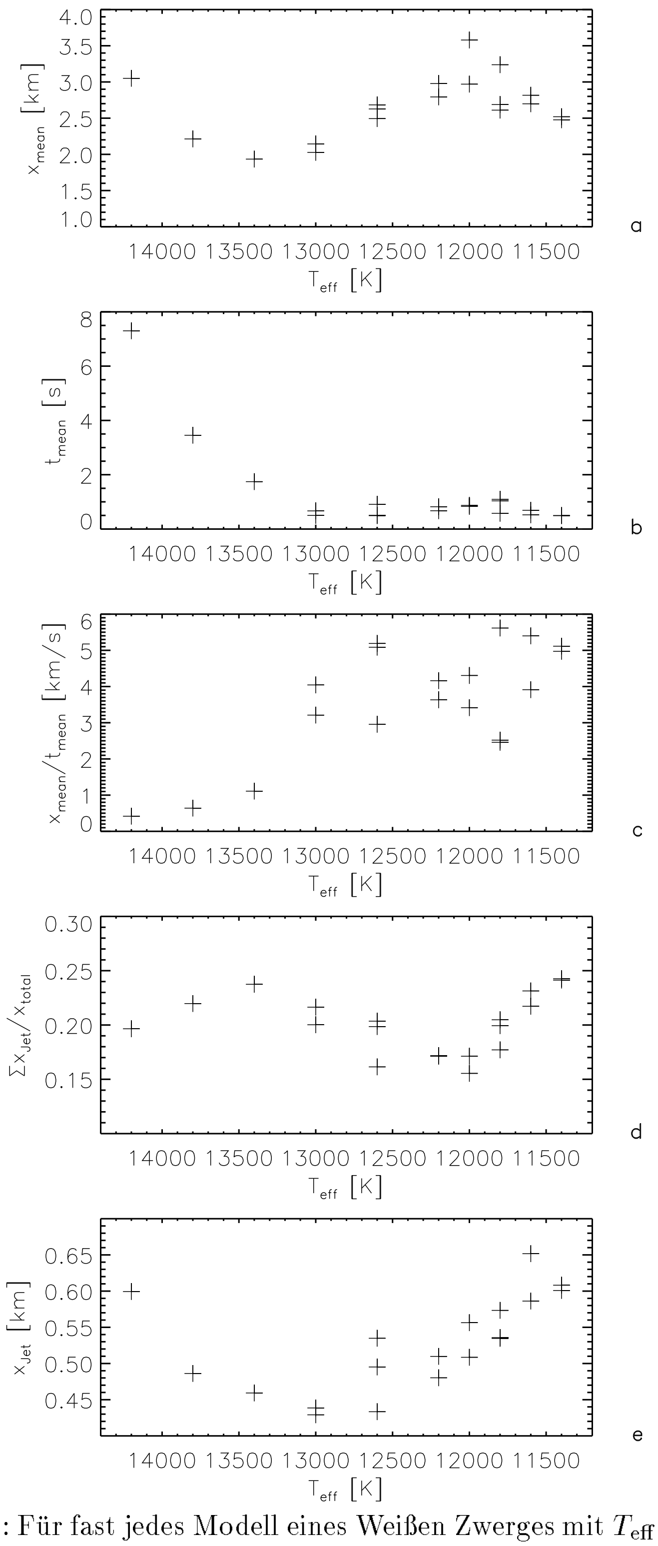


Abbildung 48: Für fast jedes Modell eines Weißen Zwerges mit $T_{\text{eff}} = 14200\,\text{K} - 11400\,\text{K}$, $\log g = 8.00$ wurde aus dem Geschwindigkeitsfeld wie in Abbildung 45 der mittlere horizontale Abstand zweier Jets x_{mean} (a) und die mittlere Lebensdauer eines Jets t_{mean} (b) ermittelt und über der Effektivtemperatur aufgetragen. Im Bild (c) ist das Verhältnis dieser beiden Größen $x_{\text{mean}}/t_{\text{mean}}$ dargestellt. Bild (d) gibt den relativen Flächenanteil der Abströmgebiete, also den Grad der Asymmetrie, an. In (e) wird der mittlere Durchmesser eines Jets dargestellt. Bei den letzten beiden Größen muß beachtet werden, daß sie jeweils in der instabilen Schicht, also am oberen Teil eines Abströmkanals, bestimmt wurden.

peratur (Abb. 48a) läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die Verringerung des Abstandes mit fallender Effektivtemperatur bei den heißesten Modellen ist auf die nachlassende Strahlungsdämpfung zurückzuführen, die immer kleinere Abstände und Jet-Durchmesser (Abb. 48e) erlaubt, wie es aufgrund der linearen Theorie zu erwarten ist. Bei 13400 K gibt es ein Minimum im mittleren Abstand. Hier ist also immer eine größere Zahl von Jets im Modell enthalten. Bei geringeren Effektivtemperaturen ließe die lineare Theorie zwar noch kleinere Skalen zu, aber die Horizontalgeschwindigkeiten werden mit zunehmender Effizienz der Konvektion jetzt langsam so groß (Abb. 61), daß sie die Abströmgebiete weiter auseinanderdrücken, so daß der mittlere Abstand erst einmal wächst. Die konvektiven Geschwindigkeiten wachsen ab einer gewissen Effektivtemperatur nicht weiter an, weil die Konvektion langsam einen großen Teil am gesamten Energiefluß übernimmt, so daß die Schichtung stellenweise praktisch adiabatisch wird und der Antrieb der Konvektion stark zurückgeht. Jetzt wird der mittlere Abstand wieder kleiner.

Die Extrapolation zu höheren Effektivtemperaturen, als sie in dieser Sequenz enthalten sind, ist sicherlich erlaubt: Konvektiver Fluß und zugehörige Geschwindigkeit werden weiter abnehmen. Die horizontalen Skalen werden weiter wachsen, bis schließlich überhaupt keine konvektive Instabilität mehr vorliegt und sich keine Konvektionszone ausbilden kann. Dagegen ist die Extrapolation zu kleineren Effektivtemperaturen schwierig, weil hier schon die Definition eines Abströmgebietes (im Gegensatz zu einem turbulenten Wirbel) schwerfällt und die Analysemethode mit einigen Unsicherheiten behaftet ist.

Die mittlere Lebensdauer eines Jets t_{mean} ist schwerer zu bestimmen als der mittlere Abstand x_{mean} und zeigt folglich von Modell zu Modell größere Fluktuationen. Aus Bild 48b kann man nur entnehmen, daß die Lebensdauer zwischen $T_{\mathrm{eff}} = 14200\,\mathrm{K}$ und $T_{\mathrm{eff}} = 13000\,\mathrm{K}$ monoton und drastisch sinkt, um dann in etwa (mit beträchtlichen Unsicherheiten) konstant zu bleiben. Man muß hierbei beachten, daß bei den kühlsten Modellen kleine kurzlebige Jets existieren, die in der Nähe der dominierenden Abströmgebiete entstehen und gleich wieder verschluckt werden. Sie können der Analyse, abhängig vom eingestellten Schwellwert entgehen und so eine längere mittlere Lebensdauer (und einen größeren mittleren horizontalen Abstand) vorspiegeln.

Aus dem mittleren Abstand zweier Jets x_{mean} und der mittleren Lebensdauer t_{mean} läßt sich eine charakteristische Geschwindigkeit $x_{\mathrm{mean}}/t_{\mathrm{mean}}$ berechnen (Abb. 48c). Auch diese Größe ist mit beträchtlichen Unsicherheiten behaftet. Man erkennt aber trotzdem, daß diese Geschwindigkeit bei den heißen Modellen noch mit sinkender Effektivtemperatur ansteigt, um dann bei etwa 13000 K ein Plateau zu erreichen.

Der relative Flächenanteil der Abströmgebiete (Abb. 48d) zeigt eine Antikorrelation mit dem mittleren Jet-Abstand.

Der mittlere Durchmesser eines Jets (Abb. 48e) hat bei etwa 12800 K ein Minimum. Der Anstieg zu höheren Effektivtemperaturen hin ist auf die zunehmende Strahlungsdämpfung zurückzuführen. Bei den kühleren Modellen spielen die wachsende Viskosität und Turbulenz sicherlich eine wichtige Rolle.

Die Genauigkeit dieser Analysemethode ist noch etwas unbefriedigend und bedarf der weiteren Verbesserung. Die naheliegende Anwendung der Fourieranalyse ist aber z.B. zur genauen Größenskalenbestimmung kaum geeignet: Selbst ein einzelner Jet besitzt wegen seiner hohen Asymmetrie bei einer räumlichen Fourieranalyse Anteile in ganz verschiedenen Wellenlängenbereichen, so daß eine Festlegung einer mittleren Größe auf diese Weise nur schwer gelingen kann.

8.3 Einschwingzeitskalen

Schon vor der Durchführung einer Simulation möchte man natürlich wissen, welche Zeiträume überstrichen werden müssen, um zu gewährleisten, daß die Konvektion sich voll entwickeln kann und für die Berechnung wichtiger gemittelter Größen genügend Datenmaterial zur Verfügung steht. Einen ersten Anhaltspunkt gibt einem die Kelvin-Zeitskala (= Gesamtenergie im Modell/Gesamtfluß, siehe Gl. (3.29)). Sie variiert für die Weißen Zwerge zwischen etwa 3 s für das heißeste Modell (ZT142g80N1, $T_{\text{eff}} = 14200$ K) und ca. 100 s für das kühlste und tiefste (ZT114g80N2, $T_{\text{eff}} = 11400$ K). Diese Zunahme erklärt sich dadurch, daß eine immer größere vertikale Modellausdehnung notwendig wird, um die immer tiefer reichende Konvektionszone noch ganz im Simulationsvolumen einschließen zu können. Masse, innere Energie und damit auch die Kelvin-Zeitskala nehmen aber exponentiell mit der Tiefe zu (siehe Abb. 9 und 10). Hinzu kommt noch, daß der Strahlungsfluß für die kühleren Modelle natürlich geringer ist.

Diese langen (im Vergleich zu den typischen Simulationsdauern von ca. 15 s) Zeitskalen sind zwar zunächst einmal beunruhigend. Aber glücklicherweise stellt sich heraus, daß die Modelle auf wesentlich kürzeren Zeitskalen relaxieren. Der 12200 K-Lauf ZT122g80N1 und der 13000 K-Lauf ZT130g80N1 wurden jeweils mit einem Modell aus einer Simulation für eine Effektivtemperatur von 12600 K gestartet. In Abbildung 49 und 50 kann man verfolgen, wie sich die horizontal gemittelte Temperaturschichtung auf die neue Effektivtemperatur einstellt. Die Kelvin-Zeitskala beträgt im ersten Fall rund 20 s und im zweiten etwa 5 s. Auch bei Hinzunahme von jeweils berechneten Nachfolgemodellen läßt sich keine Umstellung beobachten, die auf der Kelvin-Zeitskala abläuft: Die Relaxationszeit ist um mehr als einen Faktor 10 kleiner und stimmt viel besser mit der Strahlungsrelaxationszeit nach Gleichung (3.30) für eine Störung der Größe einer Druckskalenhöhe am Boden des Modells überein, die man für das 12200 K-Modell mit Abbildung 9 zu etwa 1.5 s (bei $z_{\text{bottom}} = -2.8$ km) abschätzen kann.

Der Grund hierfür leuchtet sofort ein: Für die Relaxationszeit ist nicht das Verhältnis Gesamtenergie/Gesamtfluß sondern eher das Verhältnis Gesamtenergieänderung/Gesamtflußänderung entscheidend (siehe Kippenhan & Weigert 1991). Praktisch die gesamte Energie des Modells steckt aber in der einen Druckskalenhöhe direkt über dem Boden. Hier ist die Schichtung jedoch von der Konvektion kaum berührt und daher weitgehend radiativ, so daß sich die Relaxationszeit des Modells nach der Formel (3.30) für die Strahlungsrelaxationszeit, in die auch die Größe der Störung eingeht, abschätzen läßt.

Diese Abschätzung für die Relaxationszeit des gesamten Modells bleibt solange gültig, wie die Umwälzzeitskala der Konvektion viel kürzer ist, als die Strahlungsrelaxationszeitskala der bodennahen Schichten. Das ist für die meisten Modelle der Fall. Eine Ausnahme macht jedoch das 14200 K-Modell (und die heißesten A-Stern-Modelle). Hier sind die Anwachszeiten für konvektive Störungen und folglich auch die Umwälzzeitskalen wegen der effektiven Strahlungsdämpfung in der instabilen Zone so lang, daß sie die Relaxationszeit für das gesamte Modell bestimmen.

Ist man nicht nur an Angaben über die Konvektion sondern auch an Daten über auftretende Pulsationen interessiert, muß man auch die mit ihnen verknüpfte Einschwingzeit berücksichtigen.
Als Faustformel für die Mindestsimulationszeit t_{sim} kann man also schreiben

$$\boxed{t_{\text{simulation}} > \max\left(t_{\text{rad,bottom}}, t_{\text{turnover,top}}, t_{\text{relaxation,oscillation}}\right)} \; . \tag{8.1}$$

Ein Absenken der einem Modell vorgegebenen Effektivtemperatur führt zu einem Abflachen des mittleren Temperaturgradienten, was durch die Zunahme der Effizienz der

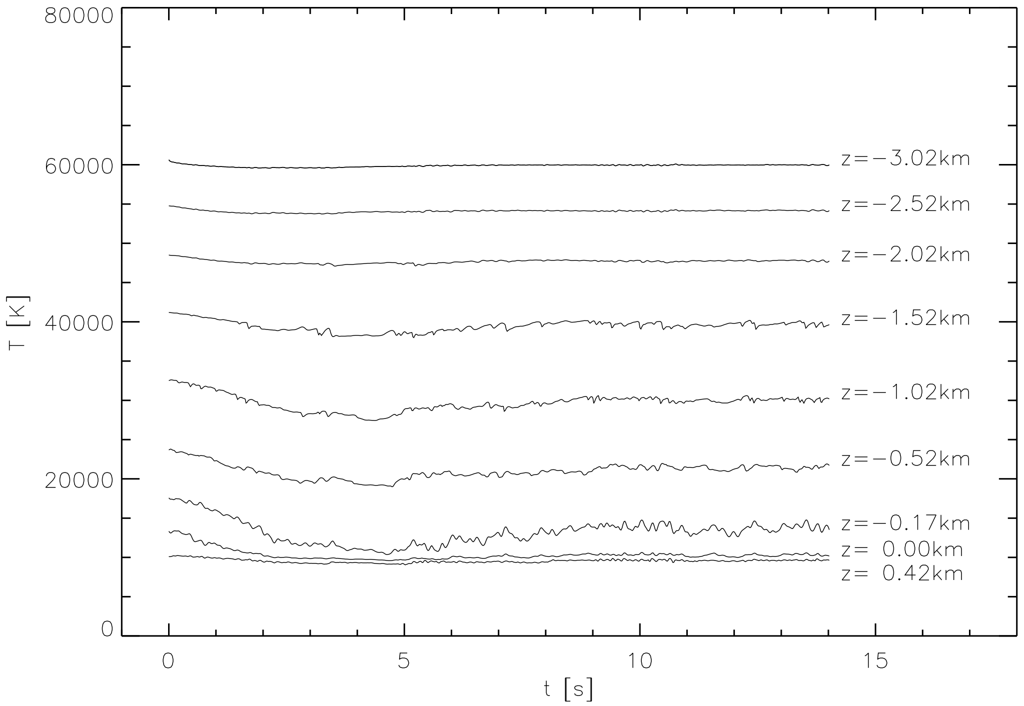


Abbildung 49: Zeitliche Temperaturentwicklung eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g80N1) mit $T_{\text{eff}} = 12200\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten, $t_{\text{Kelvin}} = 19.6\,\text{s}$. Für 9 Schichten ist das horizontale Mittel der Temperatur T über der Zeit t aufgetragen. Die Höhenangaben rechts beziehen sich auf den Nullpunkt zu Beginn der Simulation. Der Lauf wurde mit einem 12600 K-Modell gestartet. In den ersten 5 Sekunden kühlt sich das Modell ab, zeigt einen kleinen Überschwinger und ist nach ca. 9 Sekunden relaxiert. Die gegenüber dem heißeren Modell in Abbildung 50 deutlich längere Zeitskala erklärt sich im wesentlichen durch die größere Modellmasse, d.h. die größere Gesamtenergie.

Konvektion noch verstärkt wird. Dadurch kühlen sich die tieferen Schichten (bei konstantem Druck) ab. Ihre Dichte wächst, und die photosphärischen Schichten des Modells sacken nach unten. Bei einer Anhebung der vorgegebenen Effektivtemperatur geschieht natürlich der umgekehrte Vorgang. Da immer ein gewisser Teil der Photosphäre ($\min(log_{10}\tau) < -3$) im Simulationsvolumen enthalten sein sollte, andererseits in optisch sehr dünnen Schichten starke Schocks auftreten können, die nur mit einem sehr kleinen numerischen Zeitschritt erfaßt werden können, werden Modelle, die bis in solche dünnen Schichten reichen, von den Schocks „ausgebremst“. Das führt dazu, daß gelegentlich ein Simulationslauf abgebrochen werden und mit einem angepaßten Gitter neu gestartet werden muß (z.B. Modell ZT130g80N1 $\rightarrow$ Modell ZT130g80N2).

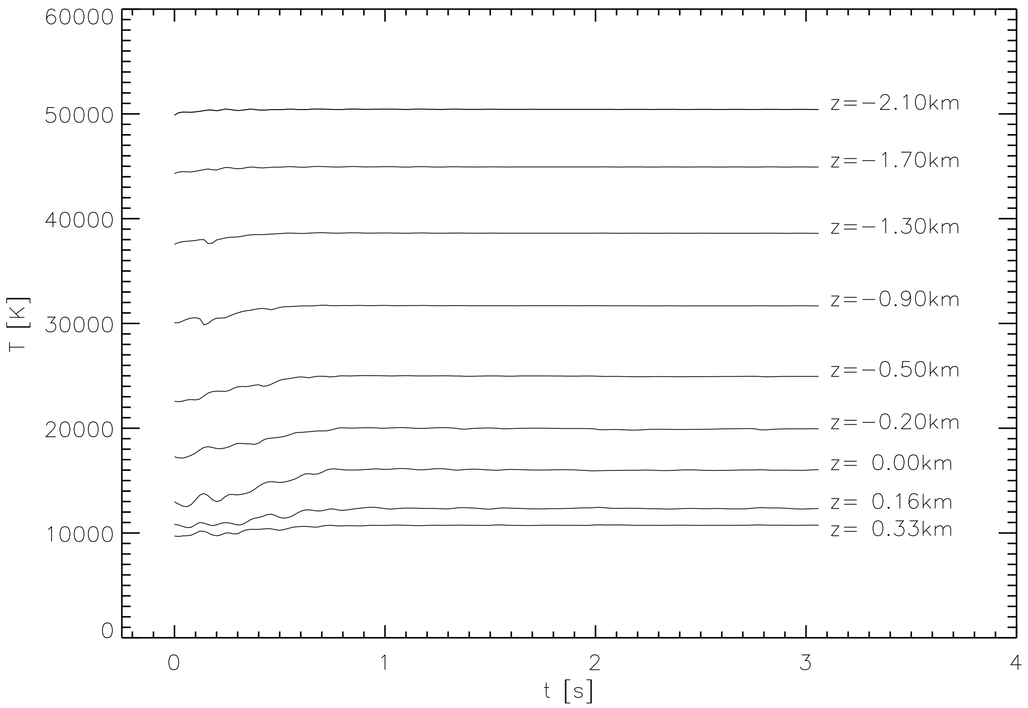


Abbildung 50: Zeitliche Temperaturentwicklung eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT130g80N1) mit $T_{\text{eff}} = 13000\,\text{K}$, $\log g = 8.00$, geschlossenem Boden und Deckel, grauen Opazitäten, $t_{\text{Kelvin}} = 5.0\,\text{s}$. Für 9 Schichten ist das horizontale Mittel der Temperatur T über der Zeit t aufgetragen. Die Höhenangaben rechts beziehen sich auf den Nullpunkt zu Beginn der Simulation. Der Lauf wurde mit einem 12600 K-Modell gestartet. Schon nach einer Sekunde hat sich das Modell vollständig auf die neue Effektivtemperatur eingestellt. Die gegenüber dem kühleren Modell in Abbildung 49 deutlich kürzere Zeitskala erklärt sich im wesentlichen durch die kleinere Modellmasse, d.h. die kleinere Gesamtenergie.

9 Struktur und „Grenzen“ einer Konvektionszone, Overshoot

In diesem Abschnitt werde ich nicht auf die Entwicklung und Dynamik der Konvektion eingehen, sondern mich auf horizontal und zeitlich gemittelte, nur noch von der Höhe abhängige Größen konzentrieren. Diesen sich aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen ergebenden Schichtungen werde ich Atmosphären gegenüberstellen, die auf der Grundlage der Mischungswegtheorie beruhen. Insbesondere werde ich untersuchen, wo genau die Grenzen einer Konvektionszone in der jeweiligen Atmosphäre anzusiedeln sind.

9.1 Vertikale Struktur einer Konvektionszone

Im Rahmen der Mischungswegtheorie ist die Position einer Konvektionszone klar definiert. Sie liegt dort, wo die Schichtung nach dem Schwarzschild-Kriterium (3.71) instabil ist. Innerhalb dieses Gebietes gibt es konvektive Geschwindigkeiten und Flüsse. Außerhalb sind sie Null.

Die Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen liefern ein gänzlich anderes Bild, wie schon aus den Schnappschüssen vom Strömungsfeld und aus den Abbildungen 24, 25, 26 usw. ersichtlich ist: Der Enthalpiefluß ist auch außerhalb der instabilen Schicht deutlich von Null verschieden. Und die konvektiven Geschwindigkeitsfelder umfassen ein noch wesentlich größeres Gebiet.

Im folgenden soll die Auffassung von Konvektion, wie sie der Mischungswegtheorie zugrundeliegt, den Ergebnissen aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen anhand eines repräsentativen Modells eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT122g80N2, mit $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$, $\log g = 8.00$ und nichtgrauen Opazitäten) gegenübergestellt werden.

In Abbildung 51 sind die Energieflüsse über der Höhe aufgetragen. Die dicke Linie stellt den räumlich und zeitlich gemittelten Enthalpiefluß F_h und die gestrichelte Linie den räumlich und zeitlich gemittelten kinetischen Energiefluß F_{kin} aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen dar. 4 dünne Linien geben den konvektiven Fluß F_{conv} nach der Mischungswegtheorie für Parameter $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ an, wobei F_{conv} mit α ansteigt. Für $\alpha = 1.5$ stimmen zwar die Amplituden von Enthalpiefluß und konvektivem Fluß hervorragend überein, aber der Verlauf mit der Höhe und insbesondere die enorme Tiefenerstreckung des Enthalpieflusses kann von der Mischungswegtheorie nicht annähernd erfaßt werden. Hinzu kommt, daß F_h in größeren Tiefen negativ werden kann, was innerhalb der lokalen Mischungswegtheorie nicht möglich ist. Auch der kinetische Energiefluß leistet in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen einen gewissen Beitrag zum Energietransport. Er tritt wegen der starken Asymmetrie zwischen Auf- und Abströmgebieten auf, wohingegen in der Mischungswegtheorie angenommen wird, daß auf- und absteigende Flüssigkeitselemente symmetrisch sind.

Nur in Schichten, in denen die Konvektion einen nennenswerten Anteil der Energie befördert, weicht die Entropieschichtung von der radiativen ab. Bild 52 zeigt die räumlich und zeitlich gemittelte Entropie s aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen (dicke Linie) zusammen mit der Entropie nach der Mischungswegtheorie für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ (4 dünne Linien). In der Nähe von $z = 0$ scheint ein α von 1.5 angemessen. Bei $z = -0.5\,\mathrm{km}$ ist die Entropie der Schichtung mit $\alpha = 2$ noch zu groß. Ein Vergleich von Bild 51 und 52 zeigt, daß das Gebiet mit positivem Enthalpiefluß die instabile Zone (mit $ds/dz < 0$) deutlich übersteigt, im Gegensatz zum konvektiven Fluß der Mischungswegtheorie. In den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen gibt es also eine Region (etwa zwischen $z = -1.3\,\mathrm{km}$ und $z = -0.55\,\mathrm{km}$), in der der Enthalpie-

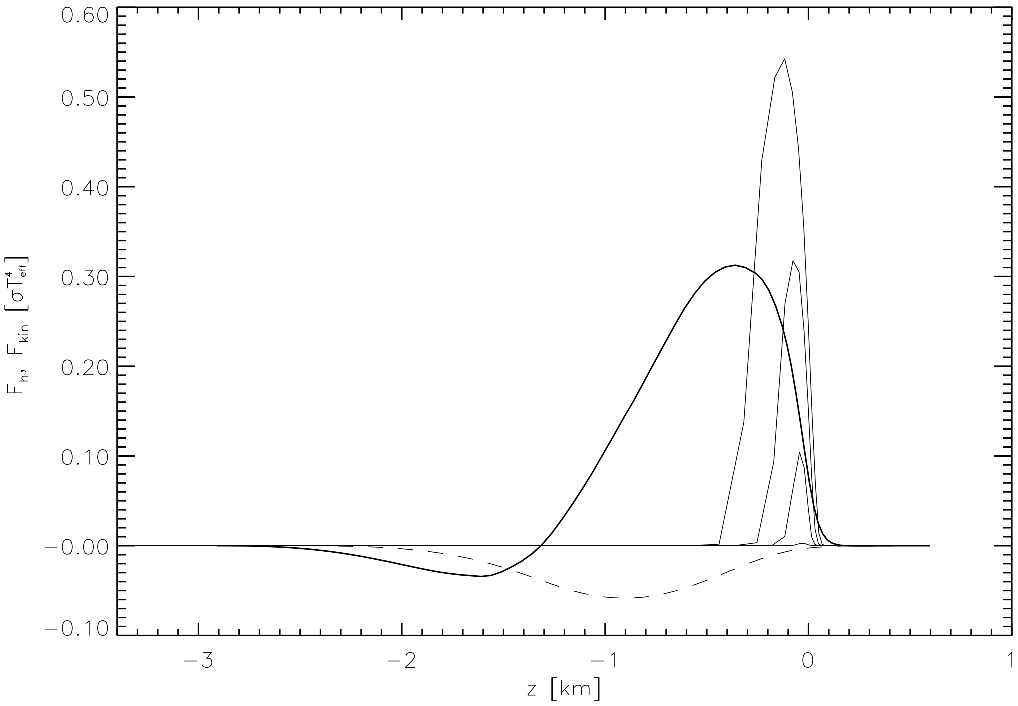


Abbildung 51: Energieflüsse als Funktion der Höhe z (Weißer Zwerg vom Typ DA (ZT122g80N2) mit $T_{\rm eff} = 12200$ K, $\log g = 8.00$, nichtgrauen Opazitäten): Dicke Linie: F_h, Gestrichelte Linie: kinetischer Energiefluß $F_{\rm kin}$, dünne Linien: Konvektiver Fluß $F_{\rm conv}$ nach MLT für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$.

fluß den Entropiegradienten „hinaufläuft" („Entropie-Umkehr", siehe Chan und Gigas 1992). Das läßt sich nach Ludwig, Jordan und Steffen (1994) auch qualitativ in einem nichtlokalen Mischungswegbild verstehen: Ein Flüssigkeitselement wird in der instabilen Zone beschleunigt (z.B. nach unten). An der Grenze der instabilen Schicht besitzt es einen abwärts gerichteten Impuls und ein Temperaturdefizit. Letzteres behält es noch ein Stück in der stabilen Schicht bei, solange bis es durch Strahlungsaustausch oder turbulente Effekte ausgeglichen wird. Bis hierhin ist der Enthalpiefluß positiv und es wirken (nach unten gerichtete) Auftriebskräfte. Da der Impuls noch groß ist, schießt das Element über diese Schicht hinaus, und es bekommt jetzt einen Temperaturüberschuß, der zusammen mit der Abwärtsgeschwindigkeit zu einem negativen Enthalpiefluß führt. In der instabilen Schicht werden zwar neue Abströmgebiete geboren, aber der konvektive Antrieb tiefreichender Jets ist keinesfalls auf sie begrenzt.

Noch eklatanter als die Energieflußverläufe differieren die Geschwindigkeitsverläufe. Abbildung 53 zeigt den zeitlich gemittelten räumlichen rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit v (dicke Linie) und der Horizontalgeschwindigkeit u (gestrichelte Linie) aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen als Funktion der Höhe z. Die 4 dünnen Linien stellen die konvektive Geschwindigkeit nach der Mischungswegtheorie für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ dar. Zwar stimmen dis Maximalwerte von $v_{\rm rms}$ und der konvektiven Geschwindigkeit für $\alpha = 1.5$ wieder recht gut überein. Aber die Mischungsweg-Konvektion ist nur auf die instabilen Schichten beschränkt, während sich das Geschwindigkeitsfeld im Strahlungs-Hydrodynamik-Modell bis in die tiefsten Schichten weit im stabilen Bereich erstreckt.

Bild 54 zeigt die gleichen Daten wie Abbildung 53 in logarithmischer Darstellung. Es läßt sich keine Begrenzung definieren, unterhalb derer das vertikale konvektive

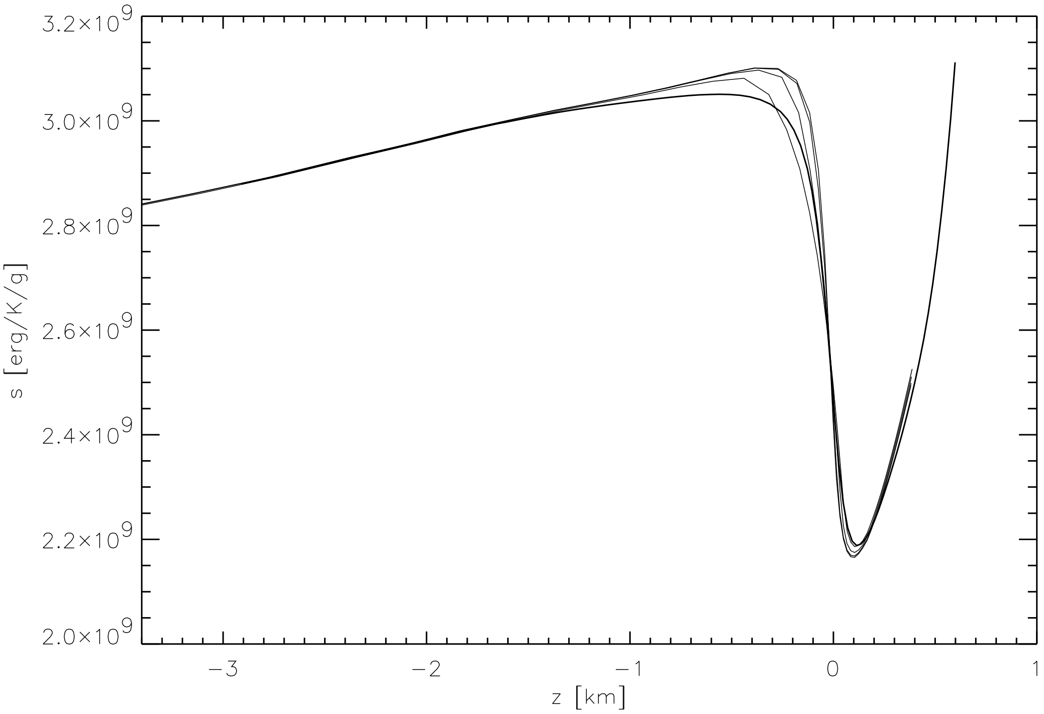


Abbildung 52: Entropie als Funktion der Höhe z (Weißer Zwerg vom Typ DA (ZT122g80N2) mit $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$, $\log g = 8.00$, nichtgrauen Opazitäten): Dicke Linie: Entropie s, 4 dünne Linien: Entropie nach MLT für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$. Bei $z \approx -0.3\,{\rm km}$ fällt s mit wachsendem α.

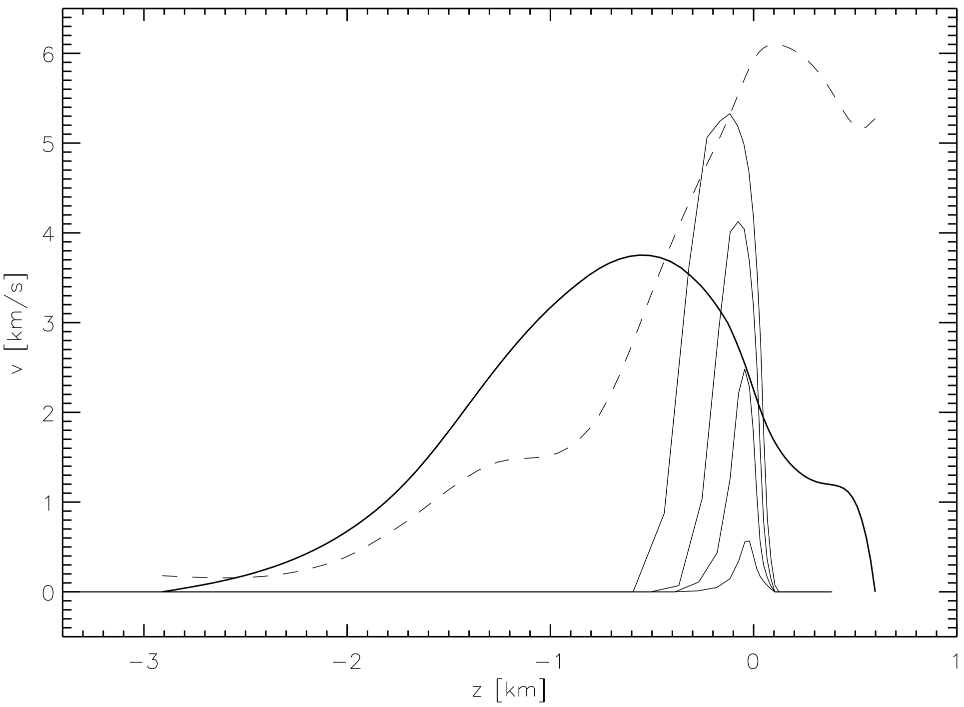


Abbildung 53: Geschwindigkeit als Funktion der Höhe z (Weißer Zwerg, ZT122g80N2). Dicke Linie: rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit v, Gestrichelte Linie: rms-Wert der Horizontalgeschwindigkeit u, 4 dünne Linien: Konvektive Geschwindigkeit nach MLT für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$.

Geschwindigkeitsfeld verschwindet. Es zeigt eher einen exponentiellen Abfall, bis es durch den geschlossenen Boden des Modells auf Null gezwungen wird (Dieser Punkt ist natürlich hier ausgeschlossen).

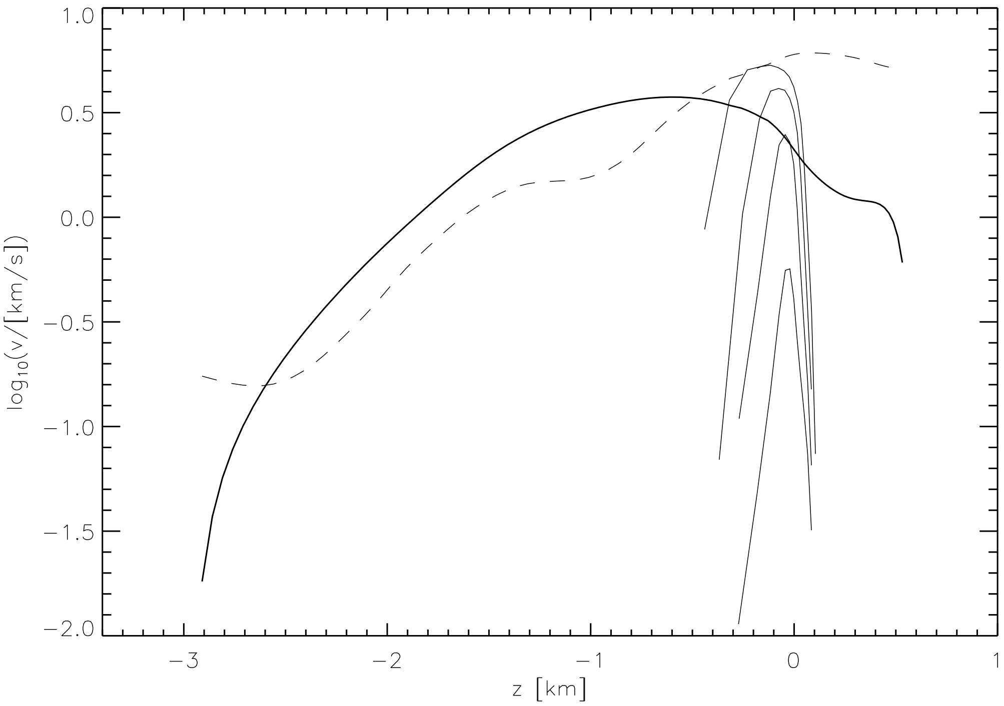


Abbildung 54: Logarithmus der Geschwindigkeit als Funktion der Höhe z (Weißer Zwerg, ZT122g80N2). Dicke Linie: rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit v, Gestrichelte Linie: rms-Wert der Horizontalgeschwindigkeit u, 4 dünne Linien: Konvektive Geschwindigkeit nach MLT für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$.

Graphik 55 zeigt wieder die gleichen Daten wie Abbildung 54, aber diesmal über dem Logarithmus des gemittelten Druckes aufgetragen. Da eine Druckskalenhöhe in der Sternhülle auch einer Massenskalenhöhe entspricht (siehe Gl. 3.15), ist die gesamte im Strahlungs-Hydrodynamik-Modell enthaltene und von der Konvektion vollständig durchmischte Masse etwa **100 mal** so groß, wie die, die sich in der von der Mischungswegtheorie vorausgesagten Konvektionszone befindet.

In Abbildung 56 sind die Geschwindigkeiten nochmals, aber diesmal über dem Logarithmus der optischen Tiefe, aufgetragen. Hier wird deutlich, wie weit sich die Geschwindigkeitsfelder in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen in die Photosphäre erstrecken, ohne daß ihre Amplitude nennenswert sinkt. Das ist wichtig zur Deutung der spektroskopischen Mikro- und Makroturbulenz in Hauptreihensternen (siehe Abschnitt 6.3). Die Mischungswegtheorie beschränkt konvektive Strömungen auf den Boden der Photosphäre und die tieferliegenden Schichten, d.h. die spektroskopisch erfaßbaren Atmosphärenschichten sind in Ruhe, was im Gegensatz zu den Beobachtungen steht.

Ich kann in dieser Untersuchung nicht genauer auf spektroskopische Auswirkungen der Konvektion eingehen. Aber als ein kleiner Ersatz kann die Abbildung 57 dienen, in der die Temperatur über dem Logarithmus der optischen Tiefe aufgetragen ist (untere Kurvenschar). Die dicke Linie beschreibt die Schichtung gemäß den Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen. Die vier dünnen jeweils eine Mischungswegschichtung nach dem modifizierten ATLAS6-Code. In der oberen Kurvenschar wur-

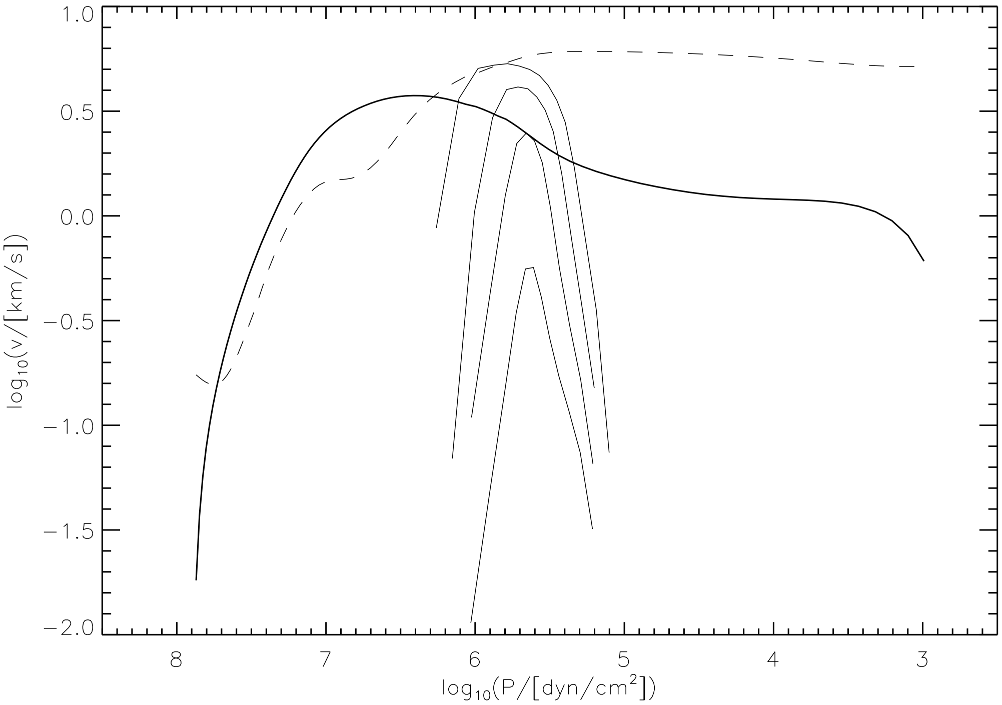


Abbildung 55: Logarithmus der Geschwindigkeit als Funktion des Logarithmus des Druckes $\log(P)$ eines Weißen Zwerges (ZT122g80N2). Dicke Linie: rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit v, Gestrichelte Linie: rms-Wert der Horizontalgeschwindigkeit u, 4 dünne Linien: Konvektive Geschwindigkeit nach MLT für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$.

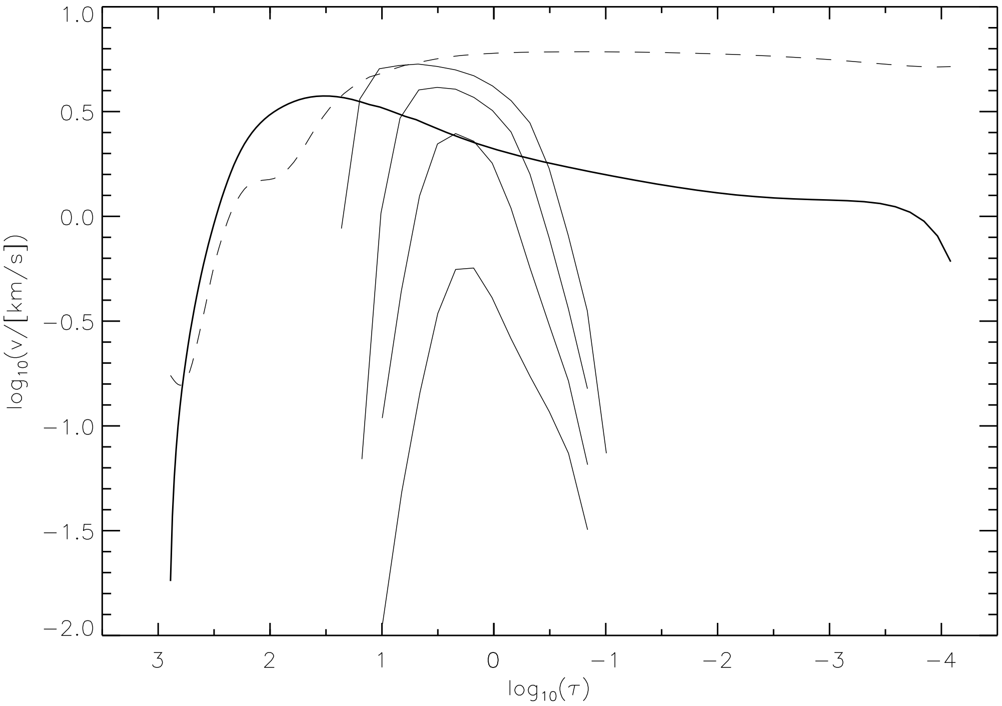


Abbildung 56: Logarithmus der Geschwindigkeit als Funktion des Logarithmus der optischen Tiefe $\log(\tau)$ (Weißer Zwerg, ZT122g80N2). Dicke Linie: rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit v, Gestrichelte Linie: rms-Wert der Horizontalgeschwindigkeit u, 4 dünne Linien: Konvektive Geschwindigkeit nach MLT für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$.

de ein Temperatur-Offset addiert und die Differenzen zwischen den Mischungsweg-Temperaturen und der Strahlungs-Hydrodynamik-Temperatur wurden um einen Faktor 10 vergrößert. Zu $\alpha = 0.5$ gehört die obere Kurve (bei $\log \tau = 2$), zu $\alpha = 2.0$ die untere (mit dem kleinsten Temperaturgradienten in der Konvektionszone). Die größte Differenz ergibt sich in den unteren Schichten, deren große optische Tiefe sie einer spektroskopischen Untersuchung entzieht. Aber auch in den wichtigen Schichten um $\tau = 1$ gibt es Unterschiede. Hier scheint das MLT-Modell mit $\alpha = 1.5$ den besten Fit zu ergeben, was in guter Übereinstimmung mit den Resultaten der wesentlich detaillierteren Untersuchung von Ludwig, Jordan und Steffen (1994) ist. Um solche Vergleiche genauer durchführen zu können, müßten aber aus den Strahlungs-Hydrodynamik- und den MLT-Modellen synthetische Spektren berechnet und gegenübergestellt werden. Das bedeutet aber, daß man aus den zweidimensionalen Simulationen entweder eine Vielzahl von Spektren (für jeden Gitterpunkt, Winkel und Zeitpunkt) erzeugen und mitteln muß, oder man generiert erst durch eine geeignete Mittelung eine repräsentative eindimensionale Atmosphäre, mit deren Hilfe dann ein synthetisches Spektrum erzeugt wird. Arbeiten dazu sind im Gange (siehe Steffen, Ludwig und Freytag 1994) und werden fortgeführt.

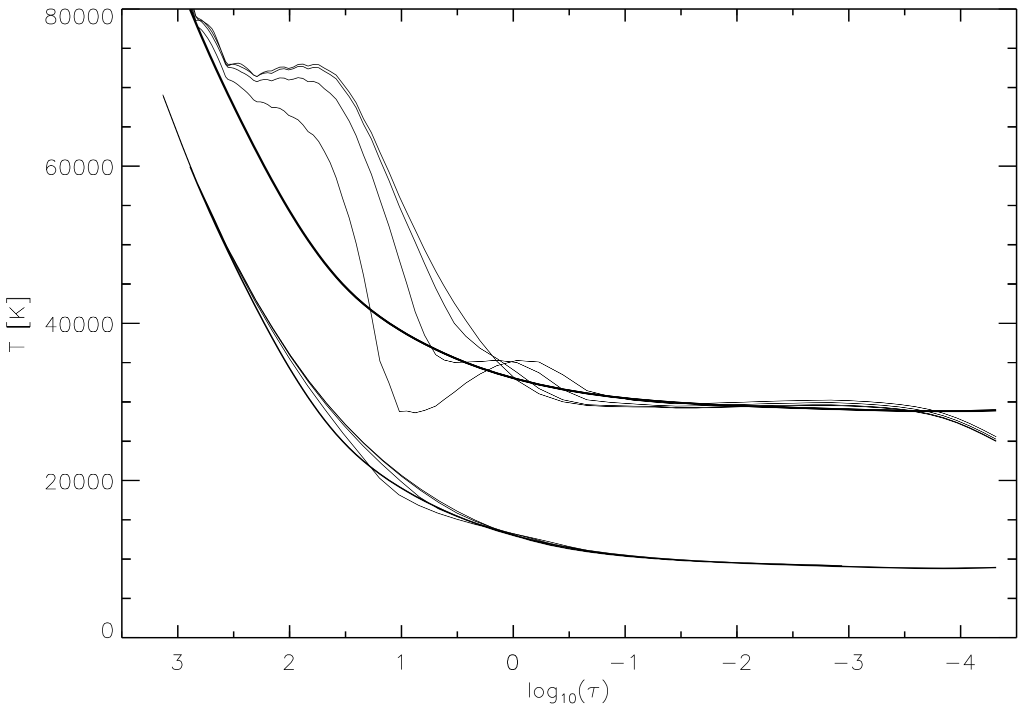


Abbildung 57: Temperatur als Funktion des Logarithmus der optischen Tiefe $\log(\tau)$ (Weißer Zwerg, nichtgraue Opazitäten, ZT122g80N2). Untere Kurvenschar: Dicke Linie: Temperatur T, 4 dünne Linien: Temperatur nach MLT für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$. Für die obere Kurvenschar wurden die Differenzen gegenüber der HD-Schichtung vergrößert: $T' = 10(T - T_{\mathrm{HD}}) + T_{\mathrm{HD}} + 20000\,\mathrm{K}$.

9.2 „Grenzen“ einer Konvektionszone

Aus dem vorangegangenen Abschnitt wird sofort klar, daß eine reale Konvektionszone eine wesentlich kompliziertere Struktur besitzt, als sie bei der Entwicklung der lokalen Mischungswegtheorie zugrundegelegt worden ist. Allein die Bestimmung der genauen

Lage der Grenzen einer Konvektionszone ist problematisch (siehe Maeder 1977). Man könnte als Kriterium das Vorliegen einer konvektiven Instabilität, das Auftreten von positivem oder von Null verschiedenem Enthalpiefluß oder auch gesamten konvektiven Fluß sowie das Vorliegen von konvektiven Strömungsfeldern wählen und gelangt jeweils zu ganz unterschiedlichen Ausdehnungen (siehe eine Aufteilung des unteren Teils einer Konvektionszone in Tabelle 13). Es wurde der Enthalpiefluß F_h verwendet, weil er dem konvektiven Fluß der Mischungswegtheorie am ehesten entspricht. Dabei wurde aber der stellenweise wichtige Beitrag des kinetischen Energieflusses zum gesamten Energiefluß ignoriert. Würde man ihn miteinbeziehen, würde die Schicht, in der der konvektive Fluß sein Vorzeichen wechselt, etwas nach oben und die Schicht, in der der Fluß nennenswert von Null verschieden ist, ein wenig nach unten verschoben.

$\frac{ds}{dz}$	F_h	v	Δ	Eigenschaften	nichtlokale MLT
< 0	> 0	$\neq 0$	-0.5 km -15.7	Konvektive Instabilität Konvektiver Antrieb Neue Abströmgebiete entstehen	Neue Blasen entstehen, werden *nach unten* beschleunigt. Temperaturdefizit wird erzeugt.
> 0	> 0	$\neq 0$	-1.4 km -15.0	Konvektive Stabilität Konvektiver Antrieb „Entropie-Umkehr“	Blasen werden weiter beschleunigt. Temperaturdefizit wird aufgebraucht.
> 0	< 0	$\neq 0$	-2.3 km -14.5	Konvektive Stabilität Konvektives Bremsen	Blasen haben Temperaturüberschuß und Dichtedefizit und werden abgebremst.
> 0	≈ 0	$\neq 0$	-5.9 km -13.2	Konvektive Stabilität Druckfluktuationen Massenerhaltung $v \propto e^{z/H_v}$	Blasen verdrängen vorhandene Materie. Konvektives Mischen
> 0	$= 0$	$= 0$	Stabile Region ohne Konvektion		

Tabelle 13: Verschiedene Bereiche einer Konvektionszone: Eingeteilt wird nur der untere Teil. Die darüberliegenden (photosphärischen) Schichten verhalten sich anders. Die erste Spalte gibt das Vorzeichen der vertikalen Ableitung der horizontal und zeitlich gemittelten Entropie an: $\frac{ds}{dz} < 0$ bedeutet konvektive Instabilität, $\frac{ds}{dz} > 0$ bedeutet Stabilität gegen Konvektion. Die zweite Spalte sagt etwas über das Vorzeichen des Enthalpieflusses F_h aus. Die dritte zeigt an, ob in der jeweiligen Schicht konvektive Geschwindigkeiten vorhanden sind. Das folgende Δ gibt die untere Grenze der jeweiligen Schicht in Kilometern und logarithmischen Massenbruchteilen für das Modell ZT122g80N1 an (aus Abb. 58 und 59). In der fünften Spalte werden die wichtigsten Eigenschaften, die die Konvektion in der jeweiligen Schicht kennzeichnen, aufgeführt. In der sechsten und letzten Spalte wird dargestellt, wie man die jeweilige Region im Blasenbild einer nichtlokalen Mischungswegtheorie beschreiben könnte.

Die oberen drei Bereiche wurden schon im vorangegangenen Abschnitt erläutert. Die unterste Zone, in der es zwar noch konvektive Strömungen aber nur einen verschwindenden Energiefluß gibt, wird im übernächsten Abschnitt genauer untersucht.

Einen Überblick, wie die Ausdehnung der Konvektionszone mit der Effektivtemperatur für Weiße Zwerge von Spektraltyp DA mit $\log g = 8.0$ variiert, sollen die Abbildungen 58, 59 und 60 geben. Dazu habe ich für jede Effektivtemperatur ein „bestes“ graues Modell ausgewählt (ZT142g80N1, ZT138g80N1, ZT134g80N1, ZT130g80N2, ZT126g80N1, ZT122g80N1, ZT120g80N4, ZT118g80N4, ZT116g80N1, ZT114g80N2), analysiert und die Positionen bestimmter markanter Punkte in die Graphiken eingetragen. Die drei Abbildungen unterscheiden sich nur dadurch, daß in 58 die Höhe z, in 59 der Logarithmus des Druckes $\log_{10} P$ und in 60 der Logarithmus der optischen Tiefe $\log_{10} \tau$ als Referenzskala gewählt wurde.

Nach unten weisende Dreiecke markieren den Deckel, nach oben weisende den Boden jedes Modells. Die vier dünnen durchgezogenen Linien kennzeichnen (von oben nach unten) die obere Nullstelle des Enthalpieflusses $F_h = 0$, sein Maximum $F_h = \max$, seine untere Nullstelle $F_h = 0$ und sein Minimum $F_h = \min$. So wird der Enthalpieverlauf mit der Höhe, wie er z.B. in Abbildung 51 dargestellt wird, grob nachgezeichnet. Die beiden gepunkteten und mit $|F_h| > 1\,\%$ gekennzeichneten Linien teilen das Gebiet ab, innerhalb dessen der Enthalpiefluß größer als ein Prozent ist. Für Effektivtemperaturen größer als 13400 K und Schichten unterhalb bzw. oberhalb dieser Linien ist der konvektive Energiefluß also vernachlässigbar. Die konvektiv instabile Zone ist von zwei gestrichelten und mit $ds/dz > 0$ gekennzeichneten Linien eingeschlossen.

Die obere strich-punktierte Kurve ($v = 100\,\mathrm{m/s}$) zeigt, an welcher Position der rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit auf 100 m/s abgesunken ist. Sie liegt für die heißeren Modelle irgendwo im Innern des Simulationsvolumens, bei den kühleren Modellen aber nur knapp über dem Boden. Die untere strich-punktierte Kurve ($v = 10\,\mathrm{cm/s}$) markiert die ungefähre Position, an der die extrapolierte konvektive Geschwindigkeit auf 10 cm/s abgesunken sein wird. Diese Extrapolation kann bei den heißen Modellen, die ein großes Overshoot-Gebiet beinhalten, in der die Vertikalgeschwindigkeit exponentiell fällt, durchgeführt werden, indem man an den Logarithmus des mittleren rms-Wertes der Vertikalgeschwindigkeit in genügend großem Abstand vom geschlossenen Boden durch eine Regressionsgerade anpaßt. Leider versagt diese Methode bei den Modellen, in denen die Konvektionszone tiefer herunterreicht. Deshalb definiere ich eine Funktion der Form

$$v_{\mathrm{fit}}(z) = a_0 \left(e^{a_1 (z - z_{\mathrm{bot}})} - e^{a_2 (z - z_{\mathrm{bot}})} \right) \tag{9.1}$$

und variiere die Parameter a_0, a_1 und a_2 (mit Hilfe eines IDL-Programms), bis sich eine optimale Anpassung ergibt an den rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit $v_{\mathrm{rms}}(z)$ im Bereich vom Boden bis zu dem Punkt, an dem $v_{\mathrm{rms}}(z)$ seinen halben Maximalwert erreicht. Einer der Parameter a_1 und a_2 ist negativ, der andere positiv (a_+). Sein Kehrwert ergibt die gesuchte Geschwindigkeitsskalenhöhe. Die Vertikalgeschwindigkeit extrapoliere ich dann mit

$$v_{\mathrm{rms,extra}}(z) = a_0 e^{a_+ (z - z_{\mathrm{bot}})} \tag{9.2}$$

bis zu dem Punkt, an dem diese Geschwindigkeit auf 10 cm/s abgesunken ist. Dieser Wert wurde gewählt, weil für ihn die konvektive Mischungszeitskala mit der Zeitskala für gravitatives Absinken vergleichbar wird (siehe Abschnitt 9.5).

Zusätzlich sind noch die Lagen der Grenzen der Konvektionszone nach der Mischungswegtheorie ($F_{\mathrm{MLT}} = 0$) und die Position des maximalen konvektiven Flusses ($F_{\mathrm{MLT}} = \max$) als dicke Linien eingezeichnet. Der Mischungswegparameter ist $\alpha = 1.5$.

Es fällt sofort auf, daß die Konvektionszone nach der Mischungswegtheorie gut mit dem instabilen Bereich aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen zusammenfällt. Die Obergrenze unterscheidet sich praktisch nicht. Hier ist die Atmosphäre von der Strahlung dominiert und unterschiedliche Konvektionstheorien erzeugen fast das gleiche Ergebnis. Beim unteren Rand gibt es leichte Schwankungen, die z.T. auf

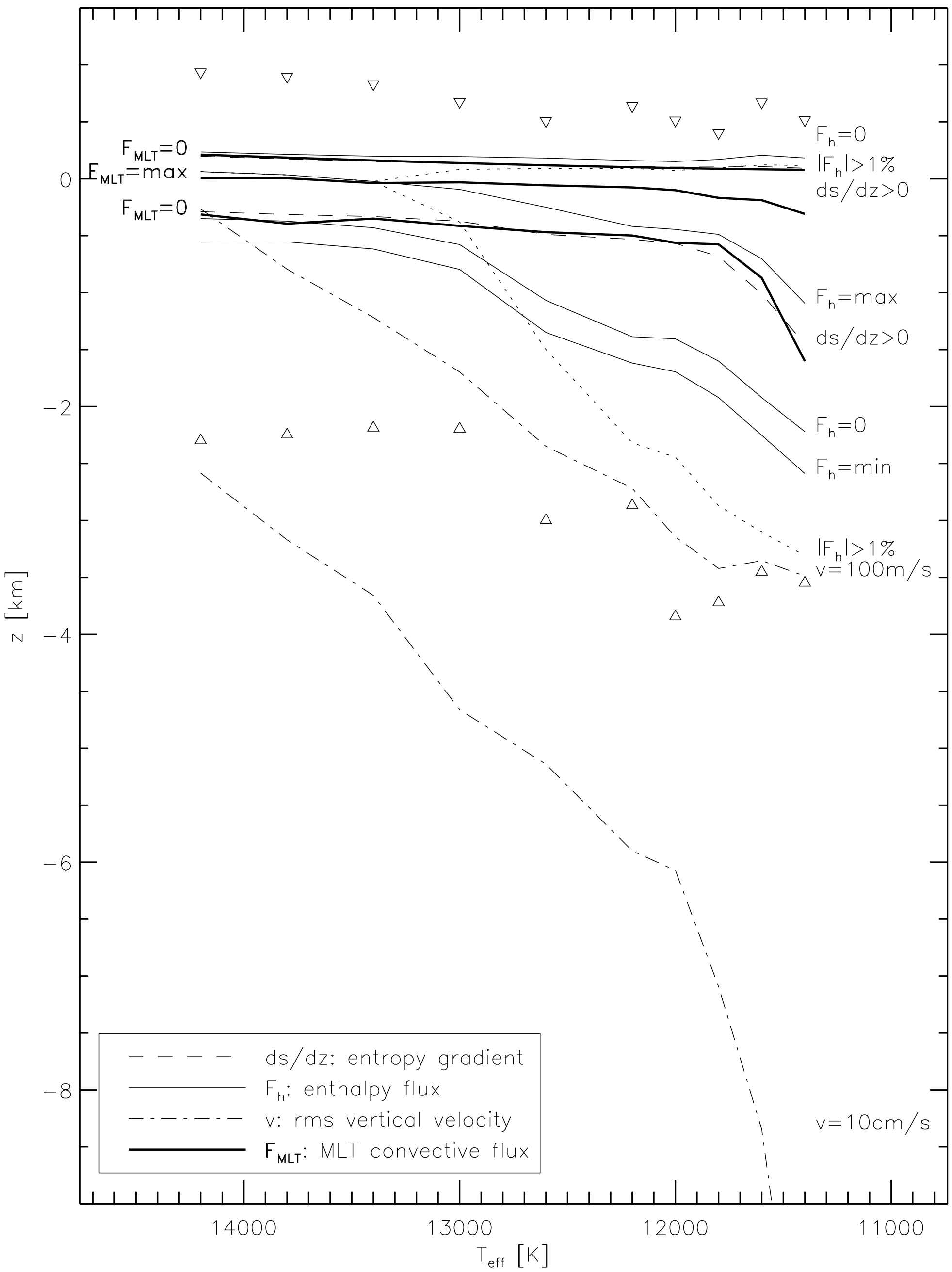


Abbildung 58: Lage der Konvektionszone als Funktion der Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ für Weiße Zwerge vom Typ DA, $\log g = 8.0$. Für die Mischungswegmodelle wurde $\alpha = 1.5$ gewählt. Genaue Erläuterungen findet man im Text.

das in diesem Bereich grobe Gitter der ATLAS6-Modelle zurückzuführen sind. Die plötzliche Tiefenausdehung der instabilen Region bei etwa 11800 K wird für einen Mischungswegparameter von 1.5 gut wiedergegeben. Für einen Wert von 1.0 ergibt sich innerhalb des betrachteten Effektivtemperaturbereichs kein Abknicken nach unten. Für $\alpha = 2.0$ erfolgt der Knick schon bei deutlich heißeren Modellen. Er markiert die Effektivtemperatur, ab der die Konvektion so effektiv wird, daß sie in der Lage ist, die Temperaturschichtung merklich zu beeinflussen und den Temperaturgradienten gegenüber dem radiativen Wert abzuflachen.

Bild 59 kann man mit der Abbildung 9 aus Tassoul et al. (1990) vergleichen, in der die Autoren die Ausdehnung der Konvektionszone, wie sie sich nach vier verschiedenen Versionen der Mischungswegtheorie ergibt, darstellen. Die Konvektionszone nach ATLAS6-Modellen mit einem $\alpha = 1.5$ liegt in etwa zwischen ihren Modellen 1 und 2.

Aber die Konvektionszone in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen ist noch deutlich ausgedehnter: Bei den heißen Modellen ist der Enthalpiefluß im wesentlichen nur in der instabilen Zone positiv. Ab etwa $T_{\mathrm{eff}} = 13400\,\mathrm{K}$ überschreitet er sie aber deutlich, so daß bei $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ ein ca. 0.9 km (oder 0.7 Druckskalenhöhen) tiefer Bereich mit „Entropie-Umkehr“ erreicht wird. Bei noch kühleren Temperaturen beginnt die instabile Zone plötzlich, sich nach unten auszudehnen, und der Bereich wird wieder kleiner.

Die Tiefe des Bereichs mit positivem Enthalpiefluß wächst zwar monoton mit fallender Effektivtemperatur. Der Temperaturverlauf zeigt aber eine gewisse „Feinstruktur“, die sich als Folge verschiedener Strömungstypen erklären läßt: Die heißesten Modelle mit extrem ineffektiver Konvektion zeigen zwar eine Asymmetrie zwischen Auf- und Abströmgebieten, aber noch keine tiefreichenden Jets (Abb. 16). Diese beginnen sich ab etwa $T_{\mathrm{eff}} = 13400\,\mathrm{K}$ zu bilden und erreichen bei ca. $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$ ihre deutlichste Ausprägung und Stabilität (Abb. 18). Weiter können sie über die instabile Schicht nicht hinauswachsen, weil sie vorher durch turbulente Effekte abgebremst bzw. zerstört werden (Abb. 23). Erst wenn die instabile Schicht selber tiefer nach unten reicht, können auch die Jets in noch größere Tiefen vordringen (unterhalb von etwa $T_{\mathrm{eff}} = 11800\,\mathrm{K}$).

Der Bereich zwischen der unteren Nullstelle des Enthalpieflusses ($F_h = 0$) und dem Minimum ($F_h = \mathrm{min}$) zeigt eine bemerkenswert geringe Schwankungsbreite bei Variation der Effektivtemperatur: $0.25\,H_p$ bei $T_{\mathrm{eff}} = 14200\,\mathrm{K}$ bis $0.15\,H_p$ bei $T_{\mathrm{eff}} = 11400\,\mathrm{K}$.

An die Zone, in der Energie durch Konvektion transportiert wird, schließt sich noch eine weitere an, in der die konvektiven Energieflüsse verschwinden und die Schichtung radiativ ist, in der jedoch noch konvektive Strömungen existieren, deren Amplitude exponentiell mit der Tiefe abklingt. Die Tiefe, in der diese Amplitude auf 100 m/s bzw. 10 cm/s abgesunken ist, wächst recht gleichmäßig mit fallender Effektivtemperatur. Bei den Modellen unterhalb von etwa $T_{\mathrm{eff}} = 12000\,\mathrm{K}$ muß die oben beschriebene Extrapolationsmethode jedoch versagen, weil die eigentliche Konvektion zu dicht an den Modellboden heranreicht und keine genügend ausgedehnte Overshoot-Region mit annähernd exponentiell abklingenden Geschwindigkeiten mehr im Simulationsvolumen enthalten ist. Die Masse im Bereich zwischen der instabilen Zone (der Mischungsweg-Konvektionszone) und der Schicht, wo die konvektiven Geschwindigkeiten auf 10 cm/s abgesunken sind, ist etwa 30 mal (bei $T_{\mathrm{eff}} = 14200\,\mathrm{K}$) bis 300 mal (bei $T_{\mathrm{eff}} = 12200\,\mathrm{K}$) so groß wie die Masse innerhalb der instabilen Zone. Bei noch geringeren Effektivtemperaturen wird dieses Verhältnis aber deutlich kleiner werden. Die genaue Kenntnis der Masse, die von der Konvektion durchmischt werden kann, ist von enormer Wichtigkeit für Diffusionsrechnungen, wie im übernächsten Abschnitt beispielhaft gezeigt werden wird.

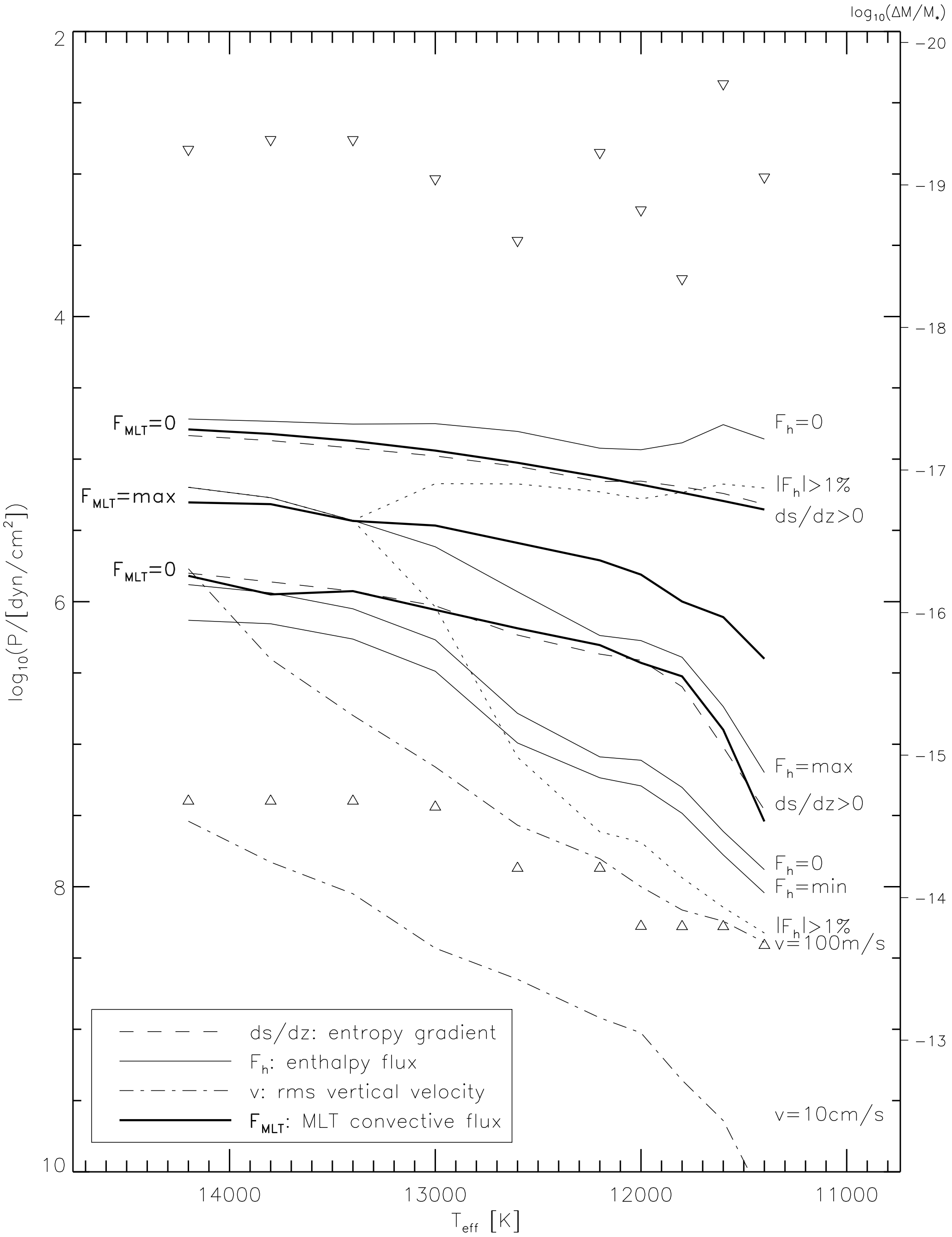


Abbildung 59: Lage der Konvektionszone als Funktion der Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ für Weiße Zwerge vom Typ DA, $\log g = 8.0$. Als Ordinate ist der Logarithmus des Druckes $\log_{10} P$ gewählt, der sich sofort in eine relative Massenskala $\Delta M/M_*$ umrechnen läßt dessen Logarithmus auf der rechte Bildseite aufgetragen ist. Für die Mischungswegmodelle wurde $\alpha = 1.5$ gewählt. Genaue Erläuterungen findet man im Text.

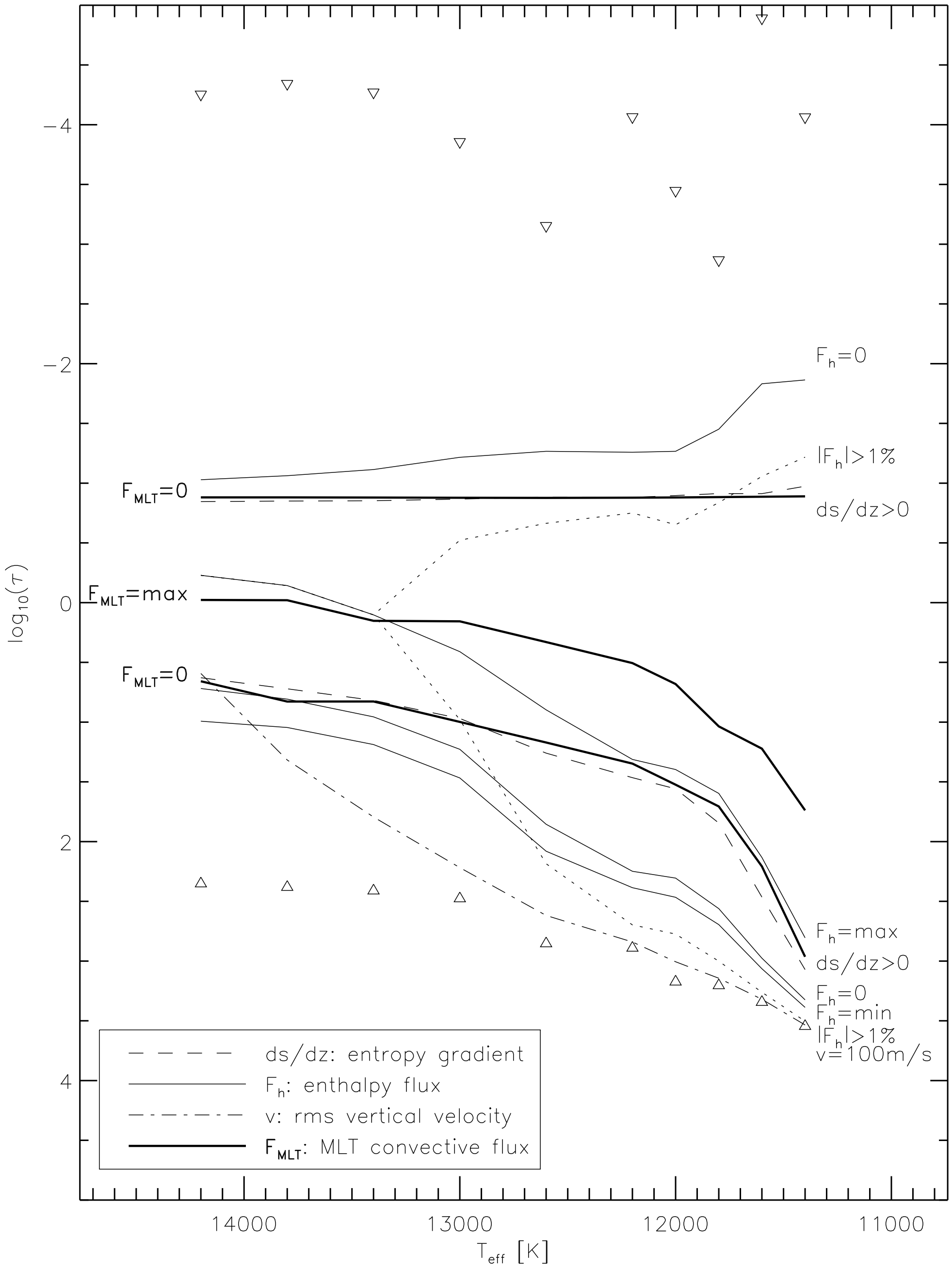


Abbildung 60: Lage der Konvektionszone als Funktion der Effektivtemperatur T_{eff} für Weiße Zwerge vom Typ DA, $\log g = 8.0$. Für die Mischungswegmodelle wurde $\alpha = 1.5$ gewählt. Genaue Erläuterungen findet man im Text.

9.3 Vergleich: Strahlungs-Hydrodynamik- und Mischungswegmodelle bei verschiedenen Effektivtemperaturen

In diesem Abschnitt soll nicht die Ausdehnung der Konvektionszone, sondern die Effektivität des konvektiven Energietransports, die Größe der konvektiven Geschwindigkeiten und die Fähigkeit der Konvektion, den photosphärischen Temperaturgradienten zu beeinflussen und sich auf diese Weise spektroskopisch bemerkbar zu machen, untersucht werden. Dabei werden wieder Ergebnisse der Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen (RHD) und Mischungsweg-Rechnungen (MLT) gegenübergestellt, und es wird nach verschiedenen Kriterien jeweils ein „bester“ Mischungswegparameter α bestimmt.

In Abbildung 61a ist der maximale Enthalpiefluß einer Reihe von Modellen Weißer Zwerge (alle mit $\log g = 8.0$) über der Effektivtemperatur aufgetragen (Plus-Zeichen). Die darunterliegenden kleinen Kreise geben das Betragsmaximum des kinetischen Energieflusses an. Zusätzlich ist der maximale konvektive Fluß einer Reihe von Mischungswegmodellen, die mit dem modifizierten ATLAS6-Code und den grauen Opazitäten aus der Tabelle davmfa für Mischungswegparameter $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ erstellt wurden, als Schar aus vier dünnen Linien eingezeichnet (Je größer α, desto größer der Fluß).

Die gute qualitative Übereinstimmung der Flußverläufe von Strahlungs-Hydrodynamik- und Mischungswegrechnungen fällt sofort ins Auge. Durch lineare Interpolation zwischen den vier MLT-Modellen habe ich den für jedes Modell optimalen Mischungswegparameter, für den $F_{\mathrm{h,max}} = F_{\mathrm{conv,max}}$ gilt, bestimmt und in Bild 61b aufgetragen. Der Enthalpiefluß im kühlsten RHD-Modell überschreitet die 100 %-Marke, was möglich ist, weil der kinetische Energiefluß abwärts gerichtet und so der gesamte konvektive Fluß nicht größer als 100 % ist. Der MLT-Fluß ist jedoch durch diese Grenze beschränkt. D.h. der maximale Enthalpiefluß ist bei diesem Modell kein gutes Vergleichskriterium mehr. Ich habe trotzdem diesen Fluß gewählt, weil er dem konvektiven Fluß der Mischungswegtheorie der Definition nach am ehesten entspricht.

Für jede einzelne Effektivtemperatur habe ich mehrere Modelle ausgewählt, die sich in verwendeter Opazitätstabelle (zzceti1 oder davmf), in der Behandlung des Strahlungstransports (grau oder nichtgrau), in der turbulenten Prandtl-Zahl (0.5 oder 1.0) oder vertikalen Ausdehnung unterscheiden. Ohne auf die einzelnen Effekte näher einzugehen (siehe dazu Abschnitt 7), kann man doch erkennen, daß die Schwankungen durch Parametervariation in den RHD-Ergebnissen wesentlich kleiner sind als die Unsicherheiten, die durch die ungenaue Kenntnis des Mischungswegparameters α entstehen.

Die grob sinusförmige Schwankung des optimalen α_F um den Mittelwert 1.5 halte ich deshalb für real. Sie findet sich auch in den Abbildungen 61c und d wieder. In 61c habe ich die Maxima der zeitlich gemittelten horizontalen rms-Werte von Vertikal- (Plus-Zeichen) und Horizontalgeschwindigkeit (kleine Kreise) aus den RHD-Simulationen zusammen mit der maximalen konvektiven Geschwindigkeit nach der Mischungswegtheorie (dünne Linien, für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$, $v_{\mathrm{MLT,max}}$ wächst mit α) über der Effektivtemperatur aufgetragen. In 61d habe ich aus der rms-Vertikalgeschwindigkeit und den MLT-Geschwindigkeiten ein für jedes RHD-Modell optimales α_v ermittelt, dessen Verlauf sehr gut mit dem von α_F aus Bild 61b übereinstimmt.

Um die Mühsal der Spektrumsynthese vorerst zu umgehen, habe ich die Temperaturdifferenz $(T(\log_{10}\tau = 0.2) - T(\log_{10}\tau = -0.2))/T_{\mathrm{eff}}$ als Maß für die Effektivität der Konvektion, die atmosphärische Temperaturschichtung zu beeinflussen, für die RHD- und die MLT-Schichtungen ermittelt und in Bild 61e über der Effektivtemperatur aufgetragen. Effektivere Konvektion führt zu einer Abflachung des Temperaturgradienten, d.h. die vier dünnen Linien gehören von oben nach unten zu den Mischungswegparametern $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$.

Wieder ergibt sich ein ähnliches Bild wie vorher. Ein $\alpha_{\Delta T}$ von 1.6 ± 0.3 führt zu einer guten Übereinstimmung von Temperaturgradienten aus RHD-Simulationen und MLT-Rechnungen. Ludwig et al. (1994) bestimmen für einen DA Weißen Zwerg mit $T_{\rm eff} = 12600\,{\rm K}$ und $\log g = 8.0$ aufgrund von Strahlung-Hydrodynamik-Simulationen mit anschließend durchgeführter Spektrumssynthese und Vergleich mit Spektren, die aufgrund von Mischungswegmodellen gewonnen wurden, einen Mischungswegparameter von $\alpha = 1.5$, was recht gut mit meinem Wert von etwa 1.7 (Abb.61f) für diese Sternparameter übereinstimmt.

Aufgrunddessen wage ich die Vermutung, daß ein Mischungswegparameter von 1.5 ± 0.3 im Bereich $14200\,{\rm K} \geq T_{\rm eff} \geq 11400\,{\rm K}$, $7.70 \leq \log g \leq 8.30$ für spektroskopische Untersuchungen von Weißen Zwergen angemessen ist (bei Verwendung der gleichen Version der Mischungswegtheorie wie im ATLAS6-Code (!)).

Nun noch ein Wort zu den Schwankungen des als optimal ermittelten α mit der Effektivtemperatur. Der im betrachteten Bereich sinusförmige Verlauf dieser Schwankung erscheint zu systematisch, als daß er völlig zufällig sein könnte. Die Variation von α bedeutet im Rahmen des Mischungswegformalismus eine Variation der mittleren Größe der Flüssigkeitselemente. Es ist also zu vermuten, daß eine Veränderung einer typischen Skala der Konvektionselemente in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen eine Rolle spielt. Die vertikale Ausdehnung der Konvektionszone wächst monoton mit fallender Effektivtemperatur. Aber der mittlere horizontale Abstand zweier Abströmkanäle, der in Bild 48a über der Effektivtemperatur aufgetragen ist, zeigt einen ganz ähnlichen Verlauf wie z.B. α_F in Bild 61b, wenn auch mit umgekehrten Vorzeichen. Nimmt man diese Korrelation ernst, dann bedeutet sie: Kleine mittlere horizontale Jet-Abstände (also kleine Granulen) führen zu einem hohen konvektiven Fluß (relativ zu einem Mischungswegmodell mit einem konstanten α).

Dieser Zusammenhang ist aber plausibel: Im Abschnitt 8 wurde dargestellt, daß die Abströmkanäle und nicht die Aufströmgebiete die eigentlichen aktiven Objekte sind. In den Kanälen wird praktisch der gesamte Netto-Energiefluß transportiert. Sie haben einen (für jede Effektivtemperatur/Schwerebeschleunigung) typischen Durchmesser und sind recht stabil. In ihrem Zentrum befindet sich die schnellste Abwärtsströmung. An ihren Rändern ist die Aufwärtsströmung am größten. Nimmt man nun an, daß in jedem Abströmkanal ein bestimmter (höhenabhängiger) Energiefluß transportiert wird, dann führt eine *Vergrößerung* des mittleren horizontalen Abstands bei festgehaltener Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung zu einer Verminderung des gesamten konvektiven Energieflusses, also letztlich zu einer *Verringerung* des effektiven Mischungswegparameters.

In Abbildung 62 wurde die gleiche Analyse wie in Bild 62 durchgeführt, nur wurde diesmal die Schwerebeschleunigung $\log g$ variiert und die Effektivtemperatur von $T_{\rm eff} = 12200\,{\rm K}$ beibehalten.

Es ergibt sich das gleiche Ergebnis wie zuvor: Ein Mischungswegparameter von etwa 1.5 gibt die Größe von maximalem Enthalpiefluß, Vertikalgeschwindigkeit und Temperaturgradient bei $\tau = 1$ bei nur geringer Variation mit der Schwerebeschleunigung gut wieder.

Auch für die Modelle von Hauptreihen-A-Sternen mit $\log = 4.40$ und solarer Elementzusammensetzung habe ich eine entsprechende Analyse durchgeführt (siehe Abb. 63). Es wurden Mischungswegmodelle mit Parametern $\alpha = (0.3, 0.5, 1.0)$ berechnet und eingezeichnet.

Die Modelle besitzen eine größere Fluktuation untereinander als die Modelle Weißer Zwerge (siehe die Diskussion in Abschnitt 6.3). Nur die Daten bei $T_{\rm eff} = 8500\,{\rm K}$ sind

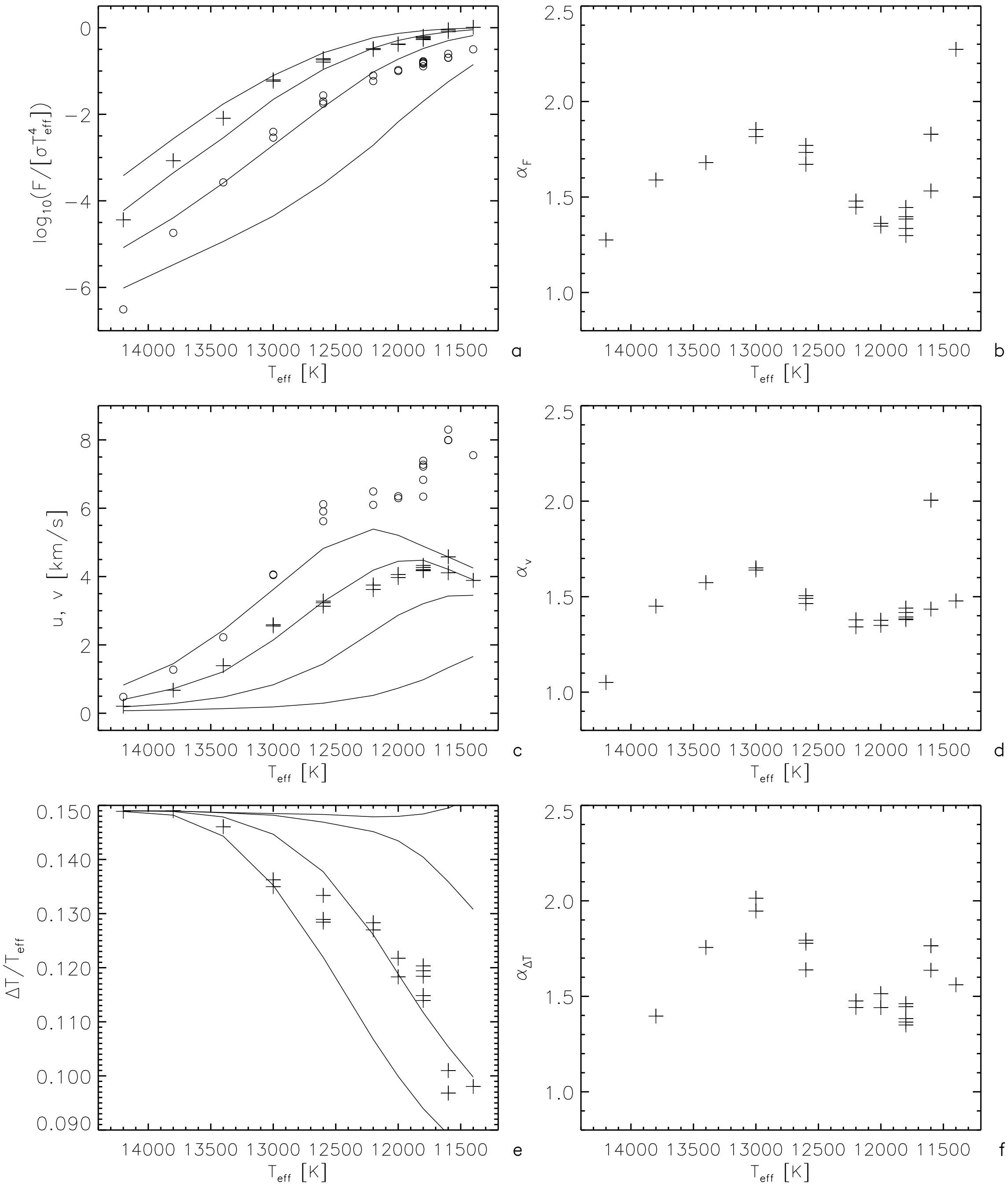


Abbildung 61: Bestimmung eines effektiven Mischungswegparameters α als Funktion der Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ für Weiße Zwerge vom Typ DA mit $\log g = 8.0$: a): „+“: $F_{\rm h,max}$; „o“: $F_{\rm kin,min}$; Linien: $F_{\rm MLT,max}$ für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ von unten nach oben, b) Aus $F_{\rm h,max}$ berechnetes optimales α, c): „+“: $v_{\rm rms,max}$; „o“: $u_{\rm rms,max}$; Linien: $v_{\rm MLT,max}$ für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ von unten nach oben, d) Aus $v_{\rm rms,max}$ berechnetes optimales α, e): „+“: $(T(\log_{10}\tau = 0.2) - T(\log_{10}\tau = -0.2))/T_{\rm eff}$ aus RHD-Rechnungen, Linien: Dieselbe Größe aus MLT-Rechnungen für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ von oben nach unten, f) Aus $(T(\log_{10}\tau = 0.2) - T(\log_{10}\tau = -0.2))/T_{\rm eff}$ berechnetes optimales α.

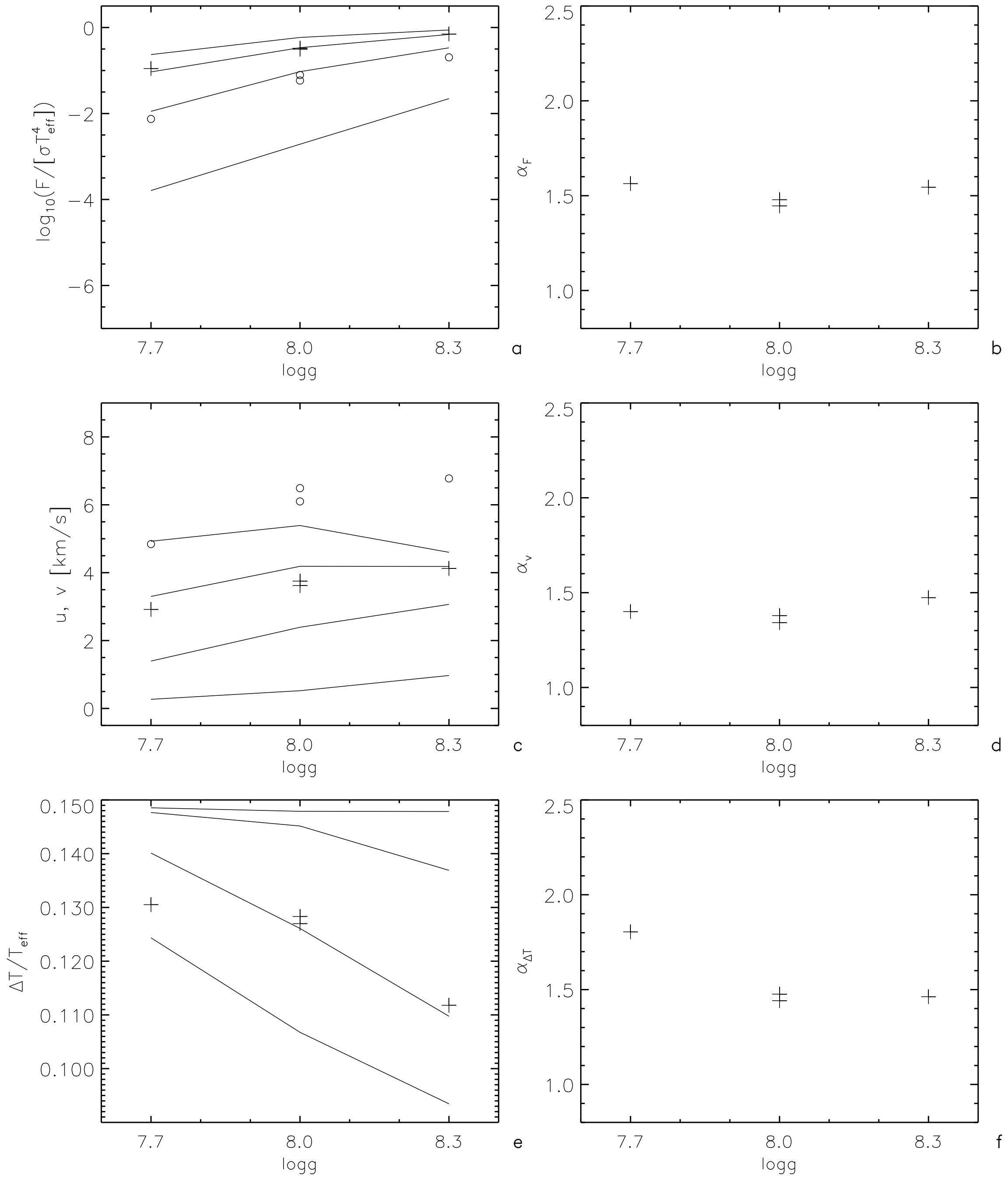


Abbildung 62: Bestimmung eines effektiven Mischungswegparameters α als Funktion der Schwerebeschleunigung $\log g$ für Weiße Zwerge vom Typ DA mit $T_{\rm eff} = 12200$ K: a): „+“: $F_{\rm h,max}$; „o“: $F_{\rm kin,min}$; Linien: $F_{\rm MLT,max}$ für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ von unten nach oben, b) Aus $F_{\rm h,max}$ berechnetes optimales α, c): „+“: $v_{\rm rms,max}$; „o“: $u_{\rm rms,max}$; Linien: $v_{\rm MLT,max}$ für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ von unten nach oben, d) Aus $v_{\rm rms,max}$ berechnetes optimales α, e): „+“: $(T(\log_{10}\tau = 0.2) - T(\log_{10}\tau = -0.2))/T_{\rm eff}$ aus RHD-Rechnungen, Linien: Dieselbe Größe aus MLT-Rechnungen für $\alpha = (0.5, 1.0, 1.5, 2.0)$ von oben nach unten, f) Aus $(T(\log_{10}\tau = 0.2) - T(\log_{10}\tau = -0.2))/T_{\rm eff}$ berechnetes optimales α.

recht zuverlässig. Die Streuung bei den heißeren und den kühleren Modellen ist größer. Trotzdem lassen sich einige Tendenzen und Unterschiede zu den Weißen Zwergen erkennen.

Als erstes fällt auf, daß insbesondere aus den Energieflußvergleichen ein extrem kleiner effektiver Mischungswegparameter von ca. $\alpha_F = 0.5$ folgt. Aus den Geschwindigkeitsvergleichen und den Temperaturvergleichen folgen zwar etwas größere Werte, aber sie sind immer noch deutlich kleiner als der mittlere Werte von $\alpha = 1.5$, der bei den Weißen Zwergen zu einer so guten Übereinstimmung zwischen RHD- und MLT-Resultaten geführt hatte.

Die Größe α_F sinkt zudem noch mit fallender Effektivtemperatur, ein Effekt, der bei α_v und $\alpha_{\Delta T}$ nicht beobachtet wird.

Als empirische Unterstützung für solch kleine Mischungswegparameter möchte ich die Arbeit von Fuhrmann et al. (1993) anführen. Die Autoren finden aufgrund ihrer spektroskopischen Analyse von Hα- und Hβ-Profilen einen Mischungswegparameter von $\alpha = 0.5 \pm 0.3$ für F- und G-Zwerge. Solch ein niedriger Wert ist also auch für A-Sterne im Bereich des Möglichen.

Die Frage lautet nun: Warum haben insbesondere die 7500 K-Modelle einen so viel kleineren konvektiven Energiefluß, als er von der Mischungswegtheorie mit einem typischen α von 1 vorausgesagt wird? Es ist schwer vorstellbar, daß ein Fehler in den RHD-Simulationen dafür verantwortlich ist, denn dann sollte er sich genauso bei den Modellen von Weißen Zwergen zeigen. Ich werde den Grund für den kleinen effektiven Mischungswegparameter also bei der Mischungswegtheorie selber suchen.

Der Hauptunterschied zwischen den Atmosphären von A-Sternen und Weißen Zwergen ist nicht die geometrische Ausdehnung, sondern die Steilheit des Temperaturgradienten am Boden der Photosphäre: A-Sterne besitzen geradezu einen Temperatursprung, während der Gradient bei den Weißen Zwergen nur mäßig größer ist als in den Schichten darunter (vergleiche die Abbildungen 3 und 2). Dieser steile Temperaturgradient ist für das Auftreten der konvektiven Instabilität verantwortlich. Hier liegt also geradezu die Quelle der Konvektion. Die geringe vertikale Ausdehnung des Temperatursprunges bei den A-Sternen sorgt auch für eine kleine Relaxationszeitskala für Temperaturfluktuationen, die diesen Sprung stören, wie sie z.B. durch das konvektive Strömungsfeld erzeugt werden. Weil die konvektiven Zeitskalen viel länger sind als diese Strahlungsrelaxationszeitskala, bleibt der Temperatursprung auch bei vorliegender vehementer Konvektion erhalten und wird mit in den Abströmkanal hinabgerissen (vergleiche dazu die Abbildungen 32 und 18, die Strömungsbilder eines A-Sterns bzw. einen Weißen Zwerges mit vergleichbaren maximalen Enthalpieflüssen zeigen). Im Rahmen der Mischungswegtheorie muß eine Annahme über die Ausdehnung und Geometrie eines Flüssigkeitselements gemacht werden, um den Strahlungsaustausch mit der Umgebung abzuschätzen (siehe Abschnitt 5.3.3). Bei der Wahl der typischen Größenskala (normalerweise der Druckskalenhöhe) und dem Geometriefaktor (Gl. 5.24) wird aber der geringe Durchmesser des „Temperaturschlauchs“ (Abb. 32) und vor allem die im Vergleich zur Druckskalenhöhe winzige Ausdehnung der Temperatursprungschicht nicht berücksichtigt. Das führt dazu, daß die Mischungswegtheorie mit einem „normalen“ Mischungswegparameter die Effektivität der Strahlungsdämpfung unterschätzt, was wiederum letztlich zu einer Überschätzung des konvektiven Flusses führt.

Ein Hinweis für die Plausibilität dieser Argumentation mag sein, daß beim 7500 K-A-Stern der konvektive Fluß nach den RHD-Simulationen zwar wesentlich unter den MLT-Werten liegt (für $\alpha = 1$), was für die Geschwindigkeiten nicht zutrifft. Das heißt nämlich, daß die Mischungswegtheorie im wesentlichen die Temperaturfluktuationen überschätzt, die auf den Strahlungsaustausch direkt reagieren.

Deupree (1979) weist auf eine in diesem Zusammenhang interessante Inkonsistenz der Mischungswegtheorie hin: In seinen „zweidimensionalen“ Simulationen (mit nur zwei horizontalen Gitterpunkten) entspricht die aus der horizontal gemittelten Temperatur berechnete Opazität nicht der direkt horizontal gemittelten. Die Modifikation der Mischungswegtheorie, die er daraufhin vorschlägt, um diesen Mangel zu beseitigen, führt zu deutlich geringeren konvektiven Flüssen.

Um den Vergleich zwischen Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen und Mischungswegtheorie noch detaillierter durchführen zu können und vor allem einen Vergleich mit Beobachtungen zu ermöglichen, müssen aus den vorhandenen Modellen synthetische Spektren berechnet werden. Die Simulationen für die A-Sterne sollten aber vorher noch weiter verbessert werden.

Aber schon anhand der vorliegenden Ergebnisse kann man sagen: Der Mischungswegparameter ist keine universelle Naturkonstante, die man anhand eines bestimmten Sterns (z.B. der Sonne) nur einmal genau bestimmen muß, um sie dann auch auf alle anderen Sterne mit Konvektionszonen übertragen zu können, sondern sie ist ein bloßer Fit-Parameter, um eine einfache und grobe Theorie – als solche war die Mischungswegtheorie schließlich konzipiert – an die komplexe Realität optimal anpassen zu können. Der genaue Wert von α hängt ab von Sterntyp, Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung und dem Kriterium, das man beim Anpassen zugrundelegt.

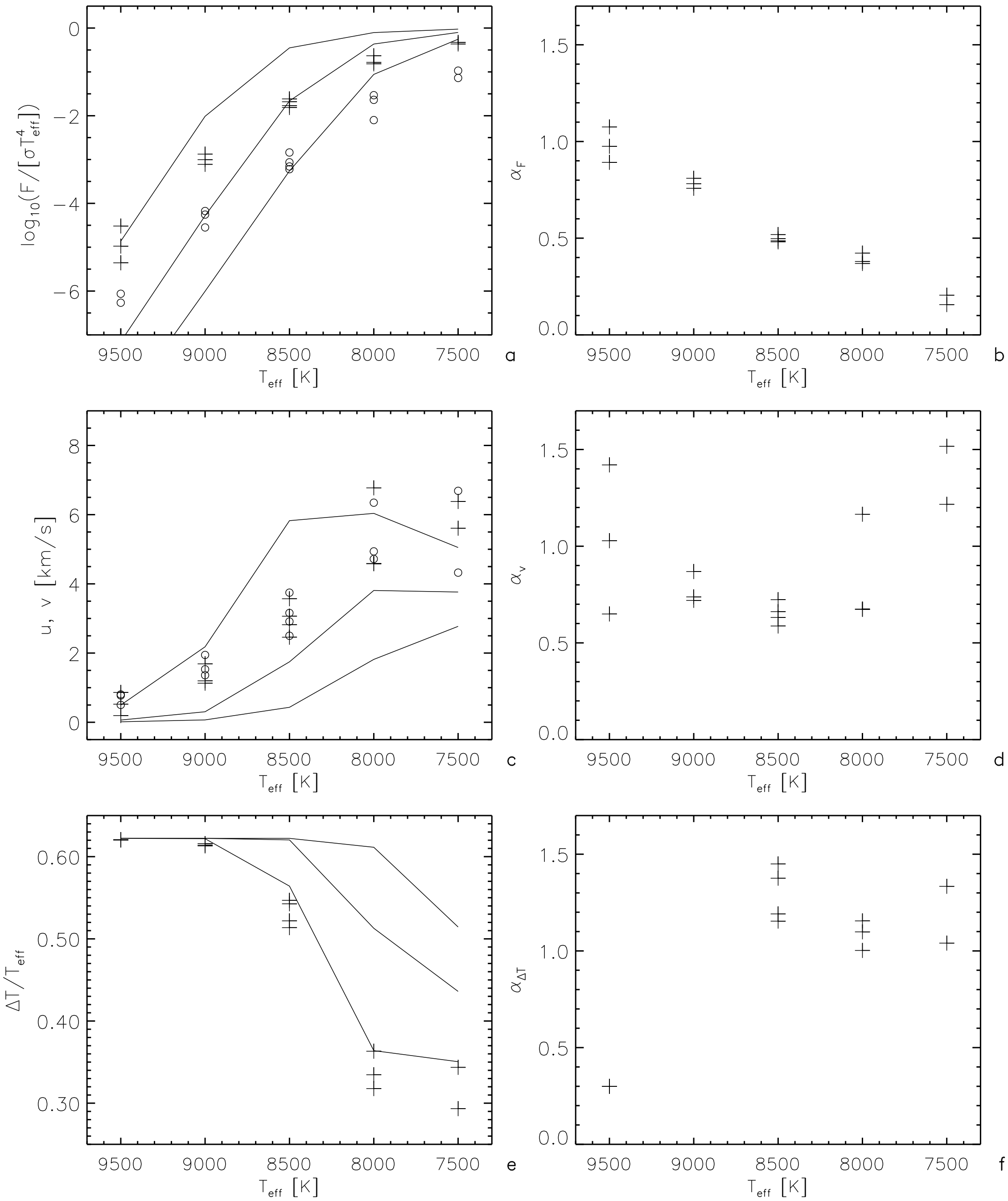


Abbildung 63: Bestimmung eines effektiven Mischungswegparameters α als Funktion der Effektivtemperatur $T_{\rm eff}$ für Hauptreihen-A-Sterne mit $\log g = 4.40$: a): „+“: $F_{\rm h,max}$; „o“: $F_{\rm kin,min}$; Linien: $F_{\rm MLT,max}$ für $\alpha = (0.3, 0.5, 1.0)$ von unten nach oben, b) Aus $F_{\rm h,max}$ berechnetes optimales α, c): „+“: $v_{\rm rms,max}$; „o“: $u_{\rm rms,max}$; Linien: $v_{\rm MLT,max}$ für $\alpha = (0.3, 0.5, 1.0)$ von unten nach oben, d) Aus $v_{\rm rms,max}$ berechnetes optimales α, e): „+“: $(T(\log_{10}\tau = 1.0) - T(\log_{10}\tau = 0.0))/T_{\rm eff}$ aus RHD-Rechnungen, Linien: Dieselbe Größe aus MLT-Rechnungen für $\alpha = (0.3, 0.5, 1.0)$ von oben nach unten, f) Aus $(T(\log_{10}\tau = 1.0) - T(\log_{10}\tau = 0.0))/T_{\rm eff}$ berechnetes optimales α.

9.4 Overshoot

Wie sich in den vorangegangenen Abschnitten herausgestellt hat, ist die Übereinstimmung der Größenordnung von konvektivem Fluß, Vertikalgeschwindigkeit, photosphärischem Temperaturgradient und der vertikalen Ausdehnung der instabilen Schicht zwischen den Aussagen von Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen und der Mischungswegtheorie erstaunlich gut (siehe z.B. Abb. 61). Und sie läßt sich durch eine Variation des Mischungswegparameters α weiter verbessern. Im Gegensatz dazu fällt z.B. der Vergleich der Höhenprofile der Enthalpieflüsse (siehe Abb. 51) deutlich ungünstiger aus. Wirklich katastrophal schneidet die Mischungswegtheorie jedoch beim Vergleich der Ausdehnung der Geschwindigkeitsfelder ab (siehe z.B. Abb. 55). Während nach der Mischungswegtheorie die Konvektion nur dazu in der Lage ist, die relativ dünne instabile Schicht zu durchmischen, wird in den Strahlungs-Hydrodynamik-Modellen das gesamte Modellvolumen von den konvektiven Geschwindigkeitsfeldern erreicht und nach und nach durchmischt. Die Masse innerhalb einer Konvektionszone ist also wesentlich größer als die Mischungswegtheorie erwarten läßt.

Schon frühe numerische Rechnungen haben ergeben, daß die beiden von der Mischungswegtheorie als getrennt vorausgesagten Konvektionszonen in A-Sternen durch Overshoot verbunden werden, so daß die zwischen ihnen liegende stabile Zone vollständig durchmischt wird (siehe die Arbeiten von Toomre et al. (1976), Nelson (1980) und Latour et al. (1981), die alle auf die Ein-Moden-Näherung zurückgreifen, oder Sofia und Chan (1984), die die Navier-Stokes-Gleichungen diskretisieren und auf einem Gitter lösen).

In den meisten Arbeiten besitzt die Modellkonvektionszone gar keine Grenze mit einer stabilen Schicht, sondern befindet sich in direktem Kontakt mit dem oberen und unteren Rand des Simulationsvolumens, weil nicht die Ausdehnung der konvektiven Strömungen sondern eher die Eigenschaften turbulenter Konvektion weit im Innern einer Konvektionszone untersucht werden sollen (siehe z.B. Chan et al. (1982), Hurlburt et al. (1984) oder Porter und Woodward (1994)). Andererseits besteht bei solchen Rechnungen immer die Möglichkeit, daß die stattfindende Wechselwirkung der Konvektion mit den Begrenzungsflächen die Ergebnisse so weit beeinflußt, daß sie ihre Relevanz für stellare Konvektionszonen verlieren.

Aus diesem Grunde werden in vielen Modellen auf die eine oder andere Weise über und/oder unter der Konvektionszone stabile Schichten eingefügt, die den direkten Kontakt der Strömungen mit dem Rand vermeiden sollen. Es stellt sich jedesmal heraus, daß die Konvektionsströmungen in das stabile Gebiet eindringen und die darin befindliche Materie durchmischen. Viele Autoren bestimmen eine Overshoot-Distanz, indem sie mehr oder weniger willkürlich eine Untergrenze für die konvektiven Geschwindigkeiten festlegen und dann ermitteln, nach wie vielen Druckskalenhöhen dieser Grenzwert unterschritten wird. Manche verwenden andere ad-hoc-Kriterien: Andersen (1994, unterer Rand der solaren Konvektionszone: $d_{\rm over} \approx 0.02 - 0.06\, H_p$), Hurlburt et al. (1994), Grossman und Naryan (1993, „Smoothed Particle Hydrodynamics“: $d_{\rm over} \approx 1 - 2\ell$), Muthsam et al. (1995, zwei- und dreidimensionale idealisierte Konvektion, obere stabile Schicht: $d_{\rm over} \approx 1.08\, H_p$, untere stabile Schicht: $d_{\rm over} \approx 0.56\, H_p$).

Aus meinen Modellrechnungen geht aber nun hervor, daß die Geschwindigkeitsfelder nirgendwo innerhalb des Simulationsvolumens auf Null abfallen (siehe Abb. 24d und 54), obwohl die stabilen Schichten im Vergleich zu anderen Rechnungen mit teilweise mehr als 3 Druckskalenhöhen eine extrem große Ausdehnung besitzen. Man findet in genügender Entfernung vom Geschwindigkeitsmaximum und vom geschlossenen Boden eher einen *exponentiellen Abfall der Vertikalgeschwindigkeit*, so daß sich zwar eine

Geschwindigkeitsskalenhöhe, aber *keine definierte untere Grenze für Geschwindigkeitsfluktuationen* ergibt. Das muß nicht unbedingt im Widerspruch zu den oben angeführten Arbeiten stehen: Dort wurde nicht gefunden, daß die Geschwindigkeitsfelder ab einer gewissen Tiefe exakt verschwinden, sondern eben einfach ad hoc eine untere Grenze für die Geschwindigkeit definiert, ab der sie so klein sein sollen, daß sie angeblich vernachlässigt werden können.

Welcher Mechanismus solch eine klare Trennlinie zwischen konvektiv durchmischtem und ruhigem Gebiet erzeugen soll, wird aber nicht angegeben. Wahrscheinlich ist diese Vorstellung ein Relikt der lokalen Mischungswegtheorie, die ja scharfe Grenzen einer Konvektionszone voraussagt, oder auch einer nichtlokalen Version, bei der die Materie in der Konvektionszone beschleunigt und dann im Overshootgebiet abgebremst wird, bis sie zum Stillstand kommt und so die Grenze dieses Gebietes klar definiert (Ballistische Näherung). An solchen nichtlokalen Erweiterungen der Mischungswegtheorie gibt es nun einiges auszusetzen, wie z.B. das Auftreten einer Singularität in den Temperaturfluktuationen, oder der willkürlichen Mischung von lokalen und nichtlokalen Eigenschaften, die zu einer riesigen Streuung in den abgeleiteten Overshoot-Distanzen verschiedener Autoren führt (siehe Renzini 1987).

Um die Ursache für das exponentielle Abklingen der Vertikalgeschwindigkeit mit der Tiefe in meinen Simulationsrechnungen zu verstehen, lohnt als erstes ein Blick in das Standard-Lehrbuch von Landau und Lifschitz (1991), § 35 „Turbulenzbereich und Ablösung“. Dort zeigen die Autoren, daß eine Potentialströmung, die in einer Ebene periodisch (oder quasi-periodisch) ist, in der zu dieser Ebene senkrechten Richtung gedämpft sein muß. Und: Je feiner die Periodizität in der Ebene, desto schneller klingt die Strömung in der senkrechten Richtung ab. Wichtig ist also vor allem die Grundabmessung der Turbulenz (also im Fall der stellaren Konvektion die Abstände der Abströmkanäle bzw. die Größe der Granulen).

Nordlund (1985, Abschnitt 2.6, „Convective penetration into stable layers“) gibt mit Hilfe einer Betrachtung der Poisson-Gleichung für den Druck eine Abschätzung für das räumliche Abklingverhalten von relativen Druckstörungen an:

$$\frac{\Delta P(z)}{P(z)} \approx e^{z/H_{\Delta p}} \tag{9.3}$$

mit

$$H_{\Delta p} = \frac{1}{2H_p} \pm \sqrt{\frac{1}{4H_p^2} + k^2}\ , \tag{9.4}$$

wobei k die horizontale Wellenzahl der Störung ist.

Sogar in einem erweiterten nichtlokalen Mischungswegbild läßt sich die Ursache für die kleinen aber nichtverschwindenden Geschwindigkeitsfelder fernab der eigentlichen Konvektionszone verstehen (siehe Tabelle 13): Ein Flüssigkeitselement, das in der instabilen Schicht in einen Abströmkanal gerissen wird, wird solange beschleunigt, wie sein Temperaturdefizit noch nicht aufgebraucht ist. Zu diesem Zeitpunkt hat es dann noch einen beträchtlichen Impuls, der es weitertreibt, bis es die jetzt rücktreibenden Kräfte schließlich zum Stillstand bringen. Bis zu diesem Moment ist es schon weit in die stabile Zone eingedrungen und hat dabei eine endliche Distanz zurückgelegt, die u.a. mit nichtlokalen Erweiterungen der Mischungswegtheorie abgeschätzt wird (siehe Skaley und Stix 1991). Aber was geschieht mit der Materie in der stabilen Schicht, die von dem herabstürzenden Flüssigkeitselement verdrängt wurde? In der kinetischen Gastheorie, auf der der Mischungswegformalismus beruht, haben die Gasmoleküle genügend leeren Raum, so daß kleine Dichtefluktuationen nach kurzer Zeit durch Diffusionsprozesse wieder ausgeglichen werden. Aber in einem hydrodynamischen System muß die verdrängte

Materie sofort wegströmen. Sie wird z.T. nach oben, zur Seite und nach unten gedrückt werden. Dazu muß sie aber erst einmal beschleunigt werden, was wiederum Druckfelder erfordert, die sich (mit abklingender Amplitude) auch nach unten fortsetzen und auch in großen Tiefen noch (kleine) Beschleunigungen verursachen können. Sie — und nicht mehr Auftriebskräfte — sind für die exponentiell abklingenden Geschwindigkeitsfelder weit unterhalb der Konvektionszone verantwortlich.

Ein anderer Weg zum Verständnis dieses exponentiellen Abklingverhaltens führt über die lineare Theorie (siehe Abschnitt 4): g^--Moden zeigen in der instabilen Zone ein räumlich oszillierendes Verhalten, während sie im stabilen Gebiet evaneszent sind (siehe Abb. 74). Die Übereinstimmung zwischen der geeignet normierten Vertikalgeschwindigkeitsamplitude der g^--Moden ohne inneren vertikalen Knoten und dem zeitlich gemittelten horizontalen rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit, die sich aus den nichtlinearen Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen ergibt, ist für ein Modell mit relativ schwacher Konvektion schon verblüffend gut (Bild 64). Modelle mit effizienterer Konvektion zeigen weit über die instabile Schicht hinausreichende Abströmkanäle, wodurch das Maximum der rms-Vertikalgeschwindigkeit nach unten verschoben (siehe Abb. 65) und die Ähnlichkeit mit den linearen Moden verschlechtert wird. Aber immer noch ist die Übereinstimmung, was das exponentielle Abklingen in den tiefen Schichten und insbesondere das Verhalten in der Nähe des unteren Randes betrifft, recht gut.

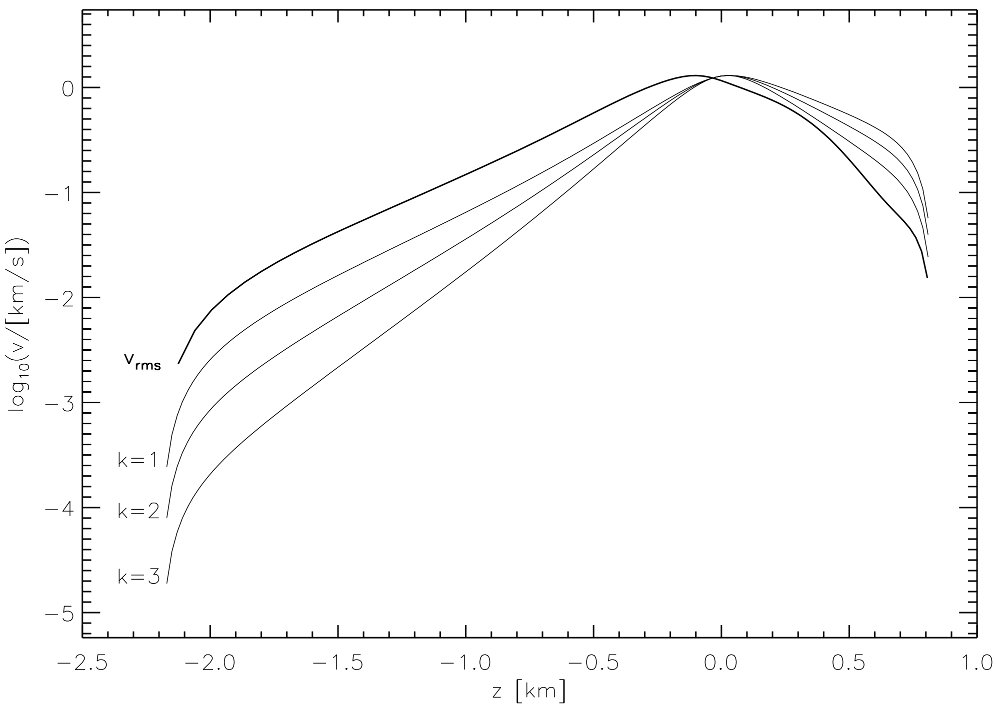


Abbildung 64: Vertikalgeschwindigkeit als Funktion der Höhe z eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\rm eff}$ = 13400 K, $\log g$ = 8.00, grauen Opazitäten: Dicke Linie: $v_{\rm rms}$ aus HD-Modellen, dünne Linien: Vertikalgeschwindigkeitsamplituden von g^--Moden mit horizontalen Wellenzahlen von $k = (1, 2, 3) \cdot 2\pi/x_{\rm total}$.

Der Zusammenhang zwischen g^--Moden und entwickelter Konvektion ist schon oft für Analysen ausgenutzt worden: So entwerfen Ledoux et al. (1961) eine Konvektionstheorie, die die Anwachsraten linearer Moden mit Heisenbergs Turbulenztheorie kombiniert. Böhm (beide Arbeiten von 1963) versucht, mit Hilfe der g^--Moden, die er aus einem Mischungsweg-Sonnenmodell berechnet, das Ausmaß des konvektiven Overshoot

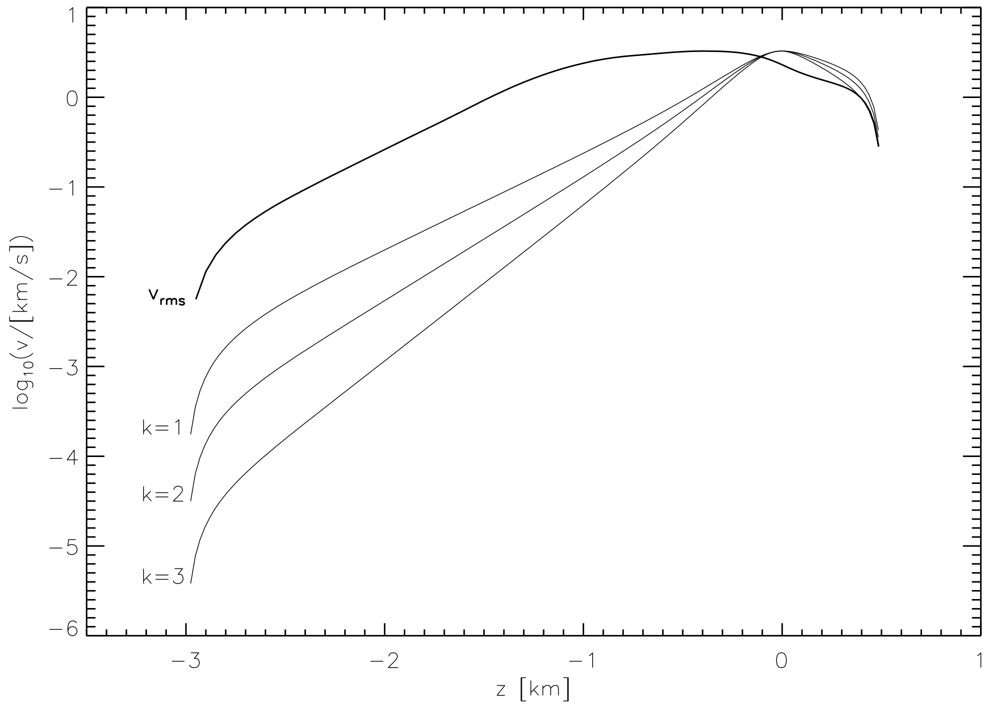


Abbildung 65: Vertikalgeschwindigkeit als Funktion der Höhe z eines Weißen Zwerges vom Typ DA (ZT126g80N1) mit $T_{\rm eff}$ = 12600 K, $\log g$ = 8.00, grauen Opazitäten: Dicke Linie: $v_{\rm rms}$ aus HD-Modellen, dünne Linien: Vertikalgeschwindigkeitsamplituden von g^--Moden mit horizontalen Wellenzahlen von $k = (1, 2, 3) \cdot 2\pi/x_{\rm total}$.

abzuschätzen und eine Begründung für die Größenskala der Granulation zu liefern. Antia und Chitre (1993) überlagern eine ganze Anzahl von g^--Moden, um das Profil des konvektiven Flusses eines Mischungsweg-Sonnenmodells zu reproduzieren und so die innere Konsistenz der Mischungswegtheorie zu prüfen (siehe auch Narasimha und Antia 1982) und die Ausdehnung der Overshoot-Region am unteren Rand der solaren Konvektionszone abzuschätzen, die sich aus der Summe der Beiträge vieler Moden ergibt. Sie finden als plausibelsten Wert 0.1 H_p. Die konvektiven Geschwindigkeiten fallen allerdings unterhalb dieser Grenze abrupt auf exakt 0.

Overshoot-Skalenhöhen und nicht bloße Overshoot-Entfernungen werden von Böhm (1963) in seiner Studie über g^--Moden in der Sonne und von Nelson und Musman (1977) und Nelson (1980) in ihren Studien über die solare Granulation und die Konvektionszone in einem F-Stern ($T_{\rm eff}$ = 7300 K, $\log g$ = 4.0) angegeben.

Aus der linearen Theorie läßt sich eine Abschätzung für die Geschwindigkeitsskalenhöhe im Overshootgebiet gewinnen, indem man die Dispersionsrelation (4.67) für eine isotherme Atmosphäre nach k_z auflöst,

$$\frac{k_z^2}{(1/2H_p)^2} = \left(\frac{\omega}{\omega_{\rm ac}}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{(1/2H_p)^2} + 1\right) + \frac{k^2}{(1/2H_p)^2}\left(\frac{\omega_{\rm BV}}{\omega}\right)^2 \quad . \tag{9.5}$$

Mit den Ansatz (4.62) ergibt sich dann für die Geschwindigkeitsskalenhöhen der beiden Lösungen

$$\frac{2H_p}{H_v} = 1 \pm \frac{ik_z}{1/2H_p} \tag{9.6}$$

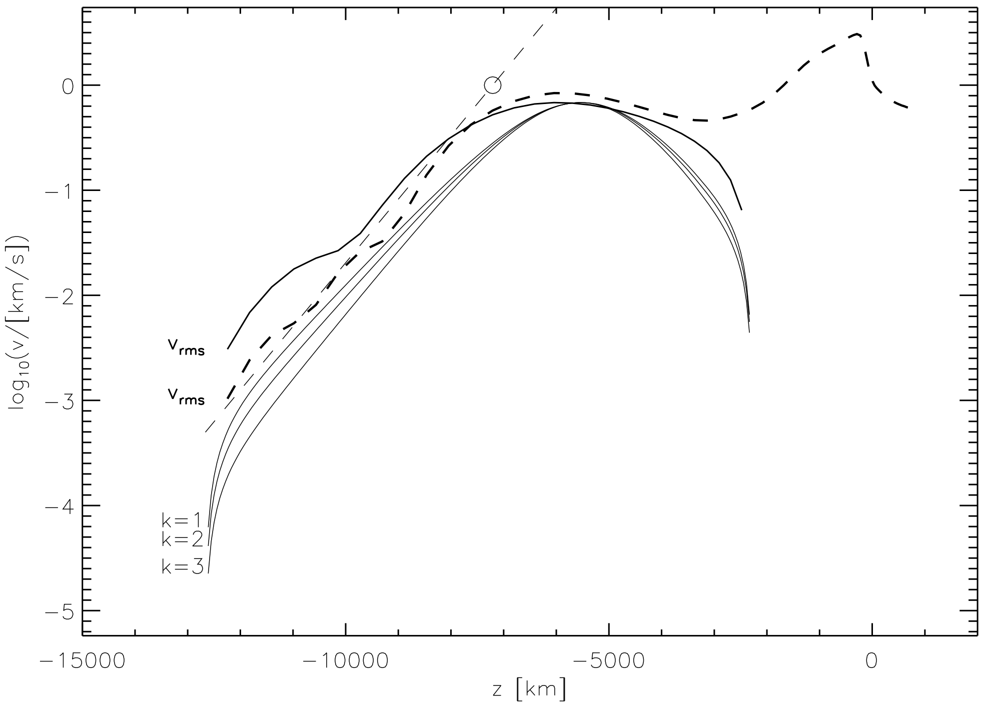


Abbildung 66: Vertikalgeschwindigkeit als Funktion der Höhe z eines A-Sterns (AT85g44N01) mit $T_{\text{eff}} = 8500\,\text{K}$, $\log g = 4.40$, grauen Opazitäten: Dicke Linien: v_{rms} aus HD-Modellen (durchgezogen: AT85g44N01, gestrichelt: AT85g44N2), dünne Linien: Vertikalgeschwindigkeitsamplituden von g^{-}-Moden mit horizontalen Wellenzahlen von $k = (1,2,3)\cdot 2\pi/x_{\text{total}}$, dünne gestrichelte Gerade: $1\,\text{km/s}\cdot\exp\left((z-z_0)\,/\,(H_p(z_0)/2)\right)$.

$$= \quad 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ac}}}\right)^2 + \frac{k^2}{(1/2H_p)^2}\left[1 - \left(\frac{\omega_{\text{BV}}}{\omega}\right)^2\right]} \tag{9.7}$$

$$\approx \quad 1 \pm \sqrt{1 + \frac{k^2}{(1/2H_p)^2}\left[1 - \left(\frac{\omega_{\text{BV}}}{\omega}\right)^2\right]} \quad , \text{für } \frac{\omega}{\omega_{\text{ac}}} \ll 1 \tag{9.8}$$

$$\approx \quad \pm\frac{k}{(1/2H_p)}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{BV}}}{\omega}\right)^2} \quad , \text{für } \frac{k}{(1/2H_p)} \gg 1 \ . \tag{9.9}$$

Schließlich erhält man

$$H_v \approx \pm\frac{1}{k\sqrt{1 - (\frac{\omega_{\text{BV}}}{\omega})^2}} \ . \tag{9.10}$$

Die Geschwindigkeitsskalenhöhe H_v hängt der horizontalen Wellenzahl k und dem Verhältnis aus der Anwachsrate $i\omega$ der konvektiven Mode zur lokalen Brunt-Väisälä-Frequenz ω_{BV} ab. Der Term $(\frac{\omega_{\text{BV}}}{\omega})^2$ ist negativ. Mit wachsender horizontaler Wellenlänge vergrößert sich H_v im Overshoot-Gebiet.

Mit der Formel (9.10) läßt sich auch der Einfluß des Strahlungstransports grob abschätzen: Effizienter Strahlungstransport in der instabilen Zone führt zu einem Absinken der effektiven Modenanwachsrate $i\omega$, also zu einer Verringerung von H_v. Effektiver Strahlungsaustausch im stabilen Gebiet verkleinert die bremsenden Auftriebskräfte und damit die effektive Brunt-Väisälä-Frequenz ω_{BV}. Dadurch wird H_v vergrößert.

Auf den Einfluß von Strahlung und Nichtlinearitäten führe ich die Abweichungen in den räumlichen Abklingraten von rms-Geschwindigkeiten und g^{-}-Modenamplituden in den Abbildungen 64, 65 und 66 zurück. Die kleine Störung des gleichmäßigen Abklingens der rms-Geschwindigkeit im A-Stern-Modell in Abbildung 66 rührt wahrscheinlich von kleinen Gegenzellen (englisch „countercells“) unterhalb der eigentlichen Konvektionszellen her.

Weiterhin vermittelt einem Gleichung (9.10) eine Idee, wie sich der Übergang von zwei- zu dreidimensionalen Simulationen eventuell auswirken könnte: In den 2D-Rechnungen kann man sich alle Strukturen als in y-Richtung unendlich ausgedehnt denken. Die gesamte horizontale Wellenzahl ist dann durch

$$k_{2\mathrm{D}}^2 = k_x^2 + k_y^2 = k_x^2 + 0 = k_{x,2\mathrm{D}}^2 \tag{9.11}$$

gegeben. Nimmt man an, daß die typische Strukturgröße auch in drei Dimensionen erhalten bleibt, so ergibt sich für die horizontale Wellenzahl in diesem Fall

$$k_{3\mathrm{D}}^2 = k_x^2 + k_y^2 \approx k_x^2 + k_x^2 = 2k_{x,2\mathrm{D}}^2 \quad . \tag{9.12}$$

Nach (9.10) würde sich damit auch die Overshoot-Skalenhöhe um einen Faktor $\sqrt{2}$ verringern. Dieses Argument ist natürlich etwas an den Haaren berbeigezogen, denn die 2D-Ergebnisse lassen sich nicht so einfach auf den dreidimensionalen Fall transformieren. Es läßt sich nicht so einfach sagen, wie sich die Topologie der Abströmgebiete verändert. Es gibt in dreidimensionaler Geometrie zusätzliche nichtlineare Effekte. Und um dies alles zu untersuchen, müssen wirklich Simulationen durchgeführt werden, die die volle Dreidimensionalität des Problems berücksichtigen. Ohne diese kann ich nur zu bedenken geben, daß die Beschränkung auf zwei Dimensionen — die aber diese Untersuchung erst ermöglicht — doch zu gewissen Fehlern führen kann.

Die lineare Theorie benutze ich auch, um den Einfluß des geschlossenen unteren Randes auf die Geschwindigkeit abzuschätzen und den exponentiellen Verlauf auch jenseits des Bodens zu extrapolieren. Nach Formel (9.6) oder auch (9.10) ergeben sich jeweils zwei charakteristische Skalenhöhen. Die eine beschreibt das exponentielle Abklingen der Geschwindigkeitsamplitude mit der Tiefe. Die andere beschreibt ein exponentielles Anwachsen, was normalerweise nur im Overshootgebiet über der Konvektionszone vorkommt. Aber der geschlossene Modellboden sorgt dafür, daß die Eigenmode des Simulationsvolumens in der Nähe des Bodens Beiträge von den Teillösungen, die zu den beiden Vorzeichen der Skalenhöhen gehören, enthält. Dadurch wird eine Formel des Typs (9.1) nahegelegt, wobei a_1 und a_2 jetzt für die beiden Geschwindigkeitsskalenhöhen stehen. Aber nur die positive Geschwindigkeitsskalenhöhe ist im Overshootgebiet unterhalb der Konvektionszone physikalisch relevant.

Als Demonstration, daß die Geschwindigkeitsfelder im Overshoot-Bereich kein turbulenter Effekt sind, soll die Graphik 67 dienen, in der für drei übereinanderliegende Punkte im Modell eines Weißen Zwerges die Vertikalgeschwindigkeiten v über der Zeit t aufgetragen sind. Man erkennt, daß sich das Geschwindigkeitsmuster innerhalb der instabilen Schicht nach einer kleinen Verzögerung auch in den größeren Tiefen wiederfindet, wenn auch mit kleinerer Amplitude und einer gewissen Verschmierung.

Nachdem ich nun hoffentlich plausibel gemacht habe, warum die Geschwindigkeitsfelder in den tiefen Overshoot-Bereichen exponentiell abklingen, stellt sich natürlich die Frage, bis zu welcher Tiefe die konvektiven Strömungen noch in der Lage sind, die Materie zu durchmischen und eventuell bestehende Elementkonzentrationsgradienten auszugleichen. Diese Grenze könnte man dann als effektiven unteren Rand der Konvektionszone definieren.

Leider läßt sich diese Grenze anhand der Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen allein nicht festlegen, denn man will ja bestimmen, ab welcher Tiefe das konvektive Mischen gegen die Konkurrenz von Gravitationstrennung oder Strahlungsauftrieb verliert

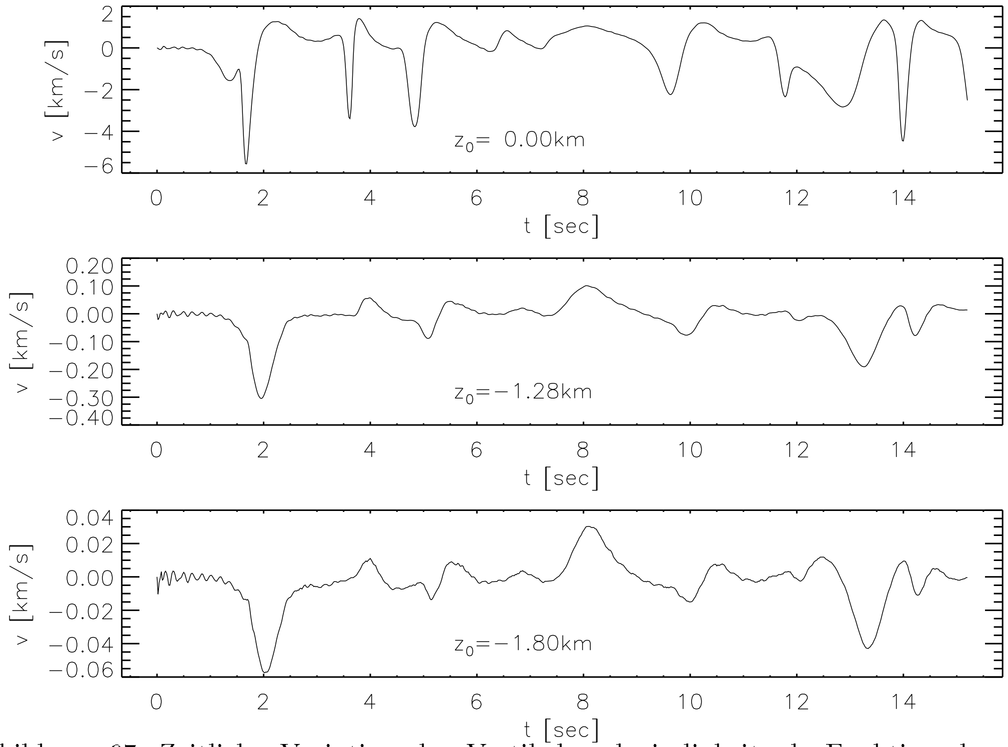


Abbildung 67: Zeitliche Variation der Vertikalgeschwindigkeit als Funktion der Zeit t für festes x und drei ausgewählte Höhenpunkte z_0 (Weißer Zwerg vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\rm eff} = 13400\,{\rm K}$, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten). Die drei Punkte liegen bei $\tau = 1.0$ (oben), dicht unterhalb der Zone mit nennenswertem negativen Fluß (Mitte) und knapp oberhalb des Modellbodens (unten).

oder aber wegen anderer Mischungsmechanismen, wie z.B. von meridionaler Zirkulation induzierter Turbulenz, unwichtig wird. Dazu müßte man eigentlich alle relevanten physikalischen Prozesse in ein gemeinsames Modell integrieren. Das ist aber ein hoffnungsloses Unterfangen, weil typische Diffusionszeitskalen bei den A-Sternen einige Millionen und bei den betrachteten Weißen Zwergen immerhin einige Jahre betragen und so die mögliche Simulationszeit um ein Vielfaches übersteigen.

Aber es gibt einen anderen gangbaren Weg: Im Rahmen von Diffusionsrechnungen wird die Mischungsfähigkeit von thermischen Bewegungen oder auch von Konvektion durch einen Diffusionskoeffizienten D beschrieben. Die einfachste eindimensionale Version der Diffusionsgleichung mit konstantem Koeffizienten lautet

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \ , \tag{9.13}$$

wobei $c(t, z)$ die Konzentration eines Elements beschreibt. Setzt man für die Konzentrationsverteilung c anfangs eine Diracsche Deltafunktion an, so ergibt sich die Lösung

$$c(t, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \ , \tag{9.14}$$

eine mit der Zeit flacher und breiter werdende Gauß-Funktion. Ein Maß für die wachsende Breite der Verteilung ist

$$z^2_{\rm rms}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(z, t)\, z^2 \, {\rm d}z = 2Dt \ , \tag{9.15}$$

d.h. $z_{\rm rms}$ wächst proportional zu $\sqrt{t}$, was für Diffusionsprozesse typisch ist.

Solch einen Diffusionskoeffizienten D werde ich nun aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen bestimmen. Dazu wähle ich ein Modell (Weißer Zwerg: ZT134g80N1), das eine tiefe Overshoot-Region mit exponentiell abfallenden Geschwindigkeiten und trotzdem eine relativ kurze konvektive Zeitskala besitzt. Mit Hilfe der für alle Zeitpunkte mit 0.02 s Abstand vorliegenden Geschwindigkeitsfelder integriere ich ab einem Startzeitpunkt von $t = 2$ s die Bahnen von Testteilchen, die ich anfangs auf einem Gitter von 80(horizontal) $\times$ 20(vertikal) angeordnet habe. Für 3 der 20 Höhenpunkte habe ich die z-Koordinaten aller anfangs in dieser Höhe liegenden Teilchen in Bild 68 aufgetragen. Der Startpunkt der obersten Teilchenschar liegt mitten in der instabilen Schicht in einer Zone mit großen Geschwindigkeitsfeldern. Die Teilchen verteilen sich schon nach knapp einer Sekunde über einen großen Teil der eigentlichen Konvektionszone. Mit der Zeit gleicht sich die Dichteverteilung der Partikel immer mehr der Dichteschichtung des Modells an, d.h. die Partikel konzentrieren sich im unteren Teil. Bei $t = 8$ s wird ein einzelnes Teilchen in die Photosphäre geschossen, was wegen der dort nur geringen Dichte entsprechend selten geschieht. Die Verteilung der weiter unten gestarteten Ensembles wächst wesentlich langsamer.

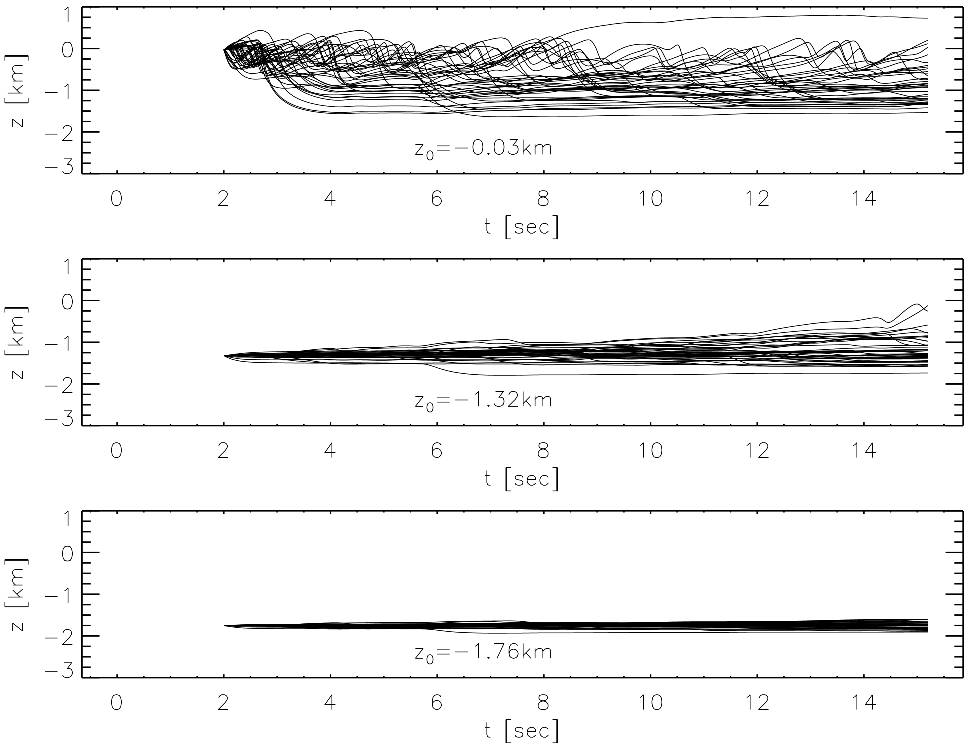


Abbildung 68: Teilchenpositionen als Funktion der Zeit t für drei ausgewählte Startpunkte z_0 (Weißer Zwerg vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\rm eff} = 13400$ K, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten). Die z-Koordinaten der Startpunkte liegen in der Nähe der Punkte aus Bild 67. Kurvenparameter ist x.

Für jede Anfangshöhe und jeden Zeitpunkt habe ich die mittlere quadratische Abweichung $z_{\rm rms}$ der z-Koordinaten der Teilchen vom jeweiligen horizontalen Mittel bestimmt. Für drei ausgewählte Anfangshöhen habe ich diese Werte in doppellogarithmischer Darstellung in Abbildung 69 aufgetragen. Über kleine Zeiträume ändert sich das Geschwindigkeitsfeld praktisch nicht, und die Teilchen werden linear von ihren Anfangspositionen weg advektiert. Die Breite der Verteilung wächst linear mit der Zeit, und die Kurven in Abbildung 69 haben die Steigung 1. Erst nach etwa 0.3 s, nachdem sich das Geschwindigkeitsfeld nennenswert umgestellt hat und auch einige Teilchen wieder zurück in Richtung auf ihre Anfangsposition gedrängt werden konnten, flachen die Kurven ab. Der Fit durch eine Gerade mit der Steigung 1/2 ist für die beiden unteren Kurven, die zu Punkten im Overshoot-Gebiet gehören, gut, aber für die Kurve mit Startpunkten direkt innerhalb der eigentlichen Konvektionszone ziemlich schlecht. Das liegt daran, daß die hier gestarteten Teilchen sich mit so hoher Geschwindigkeit bewegen, daß sie nach sehr kurzer Zeit an den Grenzen der Zone, in der die konvektiven Geschwindigkeiten hoch sind, anlangen. Ihre Verteilung kann sich dann nur noch langsam weiter ausdehnen, d.h. sie geht von der Phase des linearen Wachstums in ein Sättigungsstadium über, so daß Diffusionseffekte nicht deutlich sichtbar werden können.

Nun bin ich aber am exakten Diffusionskoeffizienten innerhalb der Konvektionszone gar nicht interessiert, denn hier sind die Mischungskräfte der konvektiven Strömungen so dominierend, daß sie alle Elementtrennungsprozesse verhindern werden, egal ob sich der Prozess nun durch eine Diffusionsgleichung genau beschrieben läßt oder nicht. Es ist ausreichend, irgendeinen genügend großen Diffusionskoeffizienten für das Innere der Konvektionszone anzunehmen. Dann werden alle Konzentrationsgradienten innerhalb dieser Zone automatisch ausgeglichen.

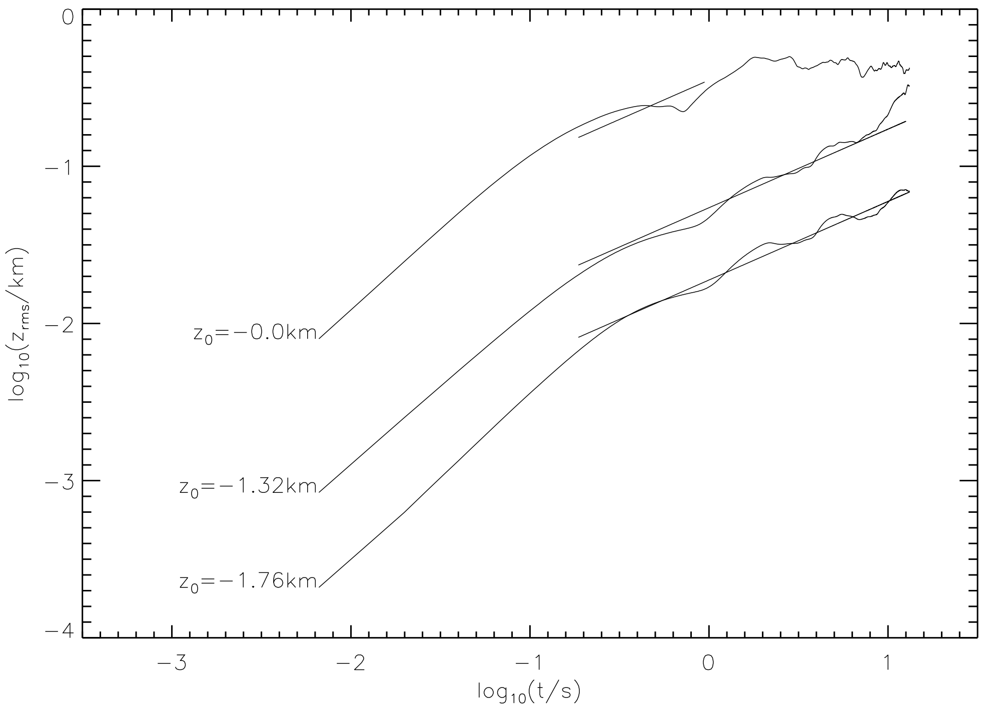


Abbildung 69: Streuung von Teilchenpositionen als Funktion der Zeit $t - t_{\mathrm{start}}$ für drei ausgewählte Startpunkte z_0 (Weißer Zwerg vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\mathrm{eff}} = 13400\,\mathrm{K}$, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten). Die drei Startpunkte liegen in der Nähe der Punkte aus Bild 67.

Viel mehr bin ich an den Prozessen im tiefen Overshoot-Gebiet interessiert, wo die Beschreibung des zeitlichen Auseinanderfließens der Verteilung als Diffusionsprozeß angemessen ist.

Für jeden Start-Höhenpunkt z bestimme ich durch Anpassung einer Geraden wie in Bild 69 gemäß Gleichung (9.15) einen Diffusionskoeffizienten $D(z)$. Dabei setze ich voraus, daß ich für jeden festen Start-Höhenpunkt die Variation von D und ρ mit der Höhe ignorieren kann. Der Verlauf von $D(z)$ ist zusammen mit $0.05\,\mathrm{km} \cdot v_{\mathrm{rms}}(z)$ und

$0.4\,\mathrm{s}\cdot v_{\mathrm{rms}}^2(z)$ in Bild 70 dargestellt. Daraus ergibt sich sofort: Im Inneren der Konvektionszone kann man $D(z) \propto v_{\mathrm{rms}}(z)$ schreiben. Aber im interessanten Overshoot-Gebiet im untersten Teil des Modells (und sogar in der Nähe des Deckels) gilt

$$\boxed{D(z) = t_{\mathrm{characteristic}} \cdot v_{\mathrm{rms}}^2(z)} \tag{9.16}$$

mit einer charakteristischen Zeitskala

$$t_{\mathrm{characteristic}} = 0.4\,\mathrm{s} \tag{9.17}$$

für dieses Modell, die eng mit der Zeitskala, auf der die konvektiven Prozesse ablaufen, verknüpft ist.

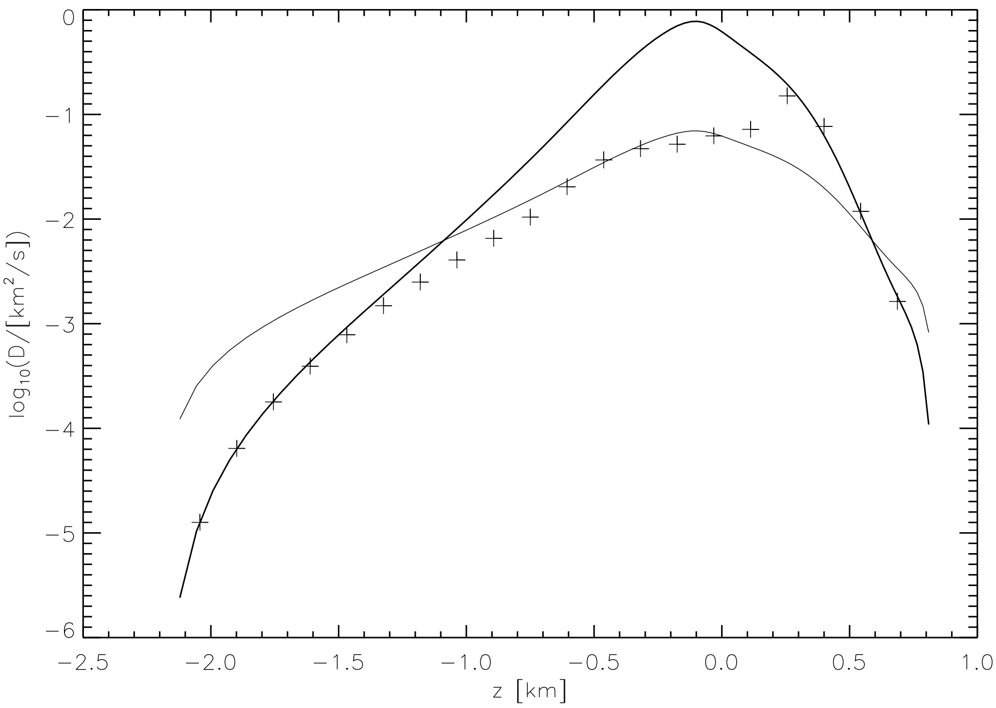


Abbildung 70: Höhenabhängiger Diffusionskoeffizient für einen Weißen Zwerg vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\mathrm{eff}} = 13400\,\mathrm{K}$, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten. „+“-Zeichen: Diffusionskoeffizient aus $z_{\mathrm{rms}}(t)$, dünne Linie: $0.05\,\mathrm{km}\cdot v_{\mathrm{rms}}$, dicke Linie: $0.4\,\mathrm{s}\cdot v_{\mathrm{rms}}^2$.

Aus Gleichung (9.16) und mit der Feststellung, daß die Vertikalgeschwindigkeit im Overshoot-Gebiet exponentiell abfällt, ergibt sich für den höhenabhängigen Diffusionskoeffizienten

$$\boxed{D(z) = t_{\mathrm{characteristic}}\, v_{\mathrm{characteristic}}^2(z_0)\, e^{\frac{z-z_0}{H_v/2}}}\;. \tag{9.18}$$

Hier ist z_0 die Höhenkoordinate, ab der der Overshoot-Bereich mit exponentiell abfallender Vertikalgeschwindigkeit beginnt. Das ist für Modelle mit relativ schwacher Konvektion, die noch keine tiefreichenden Abström-Jets zeigt, in erster Näherung der Boden der instabilen Schicht, der in guter Näherung auch aus der Mischungswegtheorie (mit dem richtigen α) bestimmt werden kann. $v_{\mathrm{characteristic}}$ ist eine charakteristische Geschwindigkeit für die Konvektion in der Nähe des Punktes z_0. Auch für dieses Größe läßt sich ein charakteristischer Wert für den unteren Teil der Konvektionszone aus Mischungswegmodellen entnehmen. Die charakteristische Zeitskala $t_{\mathrm{characteristic}}$ läßt sich dann z.B. aus der Druckskalenhöhe $H_p(z_0)$ und $v_{\mathrm{characteristic}}$ abschätzen. Dann wird nur noch eine Angabe über die Geschwindigkeitsskalenhöhe H_v benötigt, die jeweils ein gewisser Bruchteil der Druckskalenhöhe $H_p(z_0)$ ist. Dieser Wert muß aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen entnommen werden.

In Abbildung 71a ist die Geschwindigkeitsskalenhöhe in Kilometern über der Effektivtemperatur aufgetragen, wie sie sich aus dem Fit der Formel (9.1) an den zeitlich gemittelten horizontalen rms-Wert der Vertikalgeschwindigkeit ergibt. Mißt man die Geschwindigkeitsskalenhöhe nicht in Kilometern sondern in Druckskalenhöhen, muß man festlegen, die Druckskalenhöhe welcher Höhe z_0 man heranzieht. In Abbildung 71b sind drei verschiedene Möglichkeiten durchgespielt (gestrichelte Linien: H_p am Boden des jeweiligen Modells; dicke Linie: H_p am unteren Rand der instabilen Zone; dünne Linie: H_p an der Position der unteren Nullstelle des Enthalpieflusses (siehe Abb. 58)). Für Effektivtemperaturen kleiner als 12000 K ist die Methode zur Bestimmung der Geschwindigkeitsskalenhöhe unzuverlässig, weil die Overshoot-Zone im Modell nicht groß genug ist. In Bild 71c sind die zu den drei obigen Werten von z_0 gehörenden charakteristischen Geschwindigkeiten dargestellt, die in Gleichung (9.18) eingesetzt werden müssen, um den exponentiellen Abfall im fernen Overshoot-Gebiet (nicht in der Konvektionszone) zu beschreiben. Die Tiefe des Modells und damit auch die Druckskalenhöhe am Boden des Modells sind recht willkürliche Größen. Der Bereich des exponentiellen Overshoots beginnt etwa an der unteren Nullstelle des Enthalpieflusses. Dies ist die empfehlenswerteste Wahl für den Bezugspunkt z_0. Setzt man den Bereich des exponentiellen Overshoot einfach an die instabile Schicht an, was ja die einfachste Erweiterung der lokalen Mischungswegtheorie wäre, muß man bei den kühleren Modellen unrealistische charakteristische Geschwindigkeiten annehmen.

Für andere Sterne könnte man versuchen, mit Hilfe der linearen konvektiven Moden eine Abschätzung für die Skalenhöhe der Vertikalgeschwindigkeit zu gewinnen.

Der Prozeß, der zur Diffusion der Teilchen im tiefen Overshoot-Gebiet führt, stellt sich nun im wesentlichen so dar: Die Flüssigkeitselemente dort nehmen nicht an den vehementen konvektiven Bewegungen teil, sondern sind im Großen und Ganzen in Ruhe. Ihre typischen Geschwindigkeiten sind jedenfalls sehr klein gegen die Maximalgeschwindigkeit in der Konvektionszone. Jedesmal, wenn in der Konvektionszone direkt über ihnen ein Abströmgebiet vorbeiläuft oder vor allem wenn dort zwei Abströmkanäle verschmelzen und Materie mit besonders hoher Geschwindigkeit abwärts transportiert wird, erhalten die Flüssigkeitselemente einen kleinen Stoß, weil die von oben herabschießende Materie einen Teil der schon in der stabilen Schicht befindlichen Materie verdrängen muß. Diese Stöße haben zufällig verteilte Stärken und Richtungen wegen der chaotischen Natur der Konvektion. D.h. die einzelnen Flüssigkeitselemente vollführen einen „random walk“. Benachbarte Elemente sind zwar nicht unabhängig voneinander. Aber insgesamt läßt sich ihre Durchmischung als ein Diffusionsprozeß deuten.

Nach dieser Menge an theoretischen Betrachtungen fragt es sich natürlich, ob sich die Ergebnisse auch irgendwie anwenden und womöglich anhand von Beobachtungen überprüfen lassen.

Bei den Weißen Zwergen ist die trennende Wirkung der Gravitation so stark, daß die schwereren Elemente auf Zeitskalen absinken können, die kurz sind gegen die Entwicklungszeiträume (siehe z.B. Paquette et al. 1986). Das führt dazu, daß die Weißen Zwerge normalerweise in Schalen aufgebaut sind, in denen jeweils nur ein Element enthalten ist und die sich entsprechend der Masse dieses Elements von innen nach außen anordnen. Dieses einfache Bild kann aber durch andere physikalische Prozesse gestört werden. So kann eine Wasserstoff-Oberflächenkonvektionszone, die bis an die Übergangsschicht zur darunterliegende Heliumschale reicht, dieses entgegen dem Einfluß der Gravitation nach oben mischen. Das kann geschehen, wenn sich der Weiße Zwerg

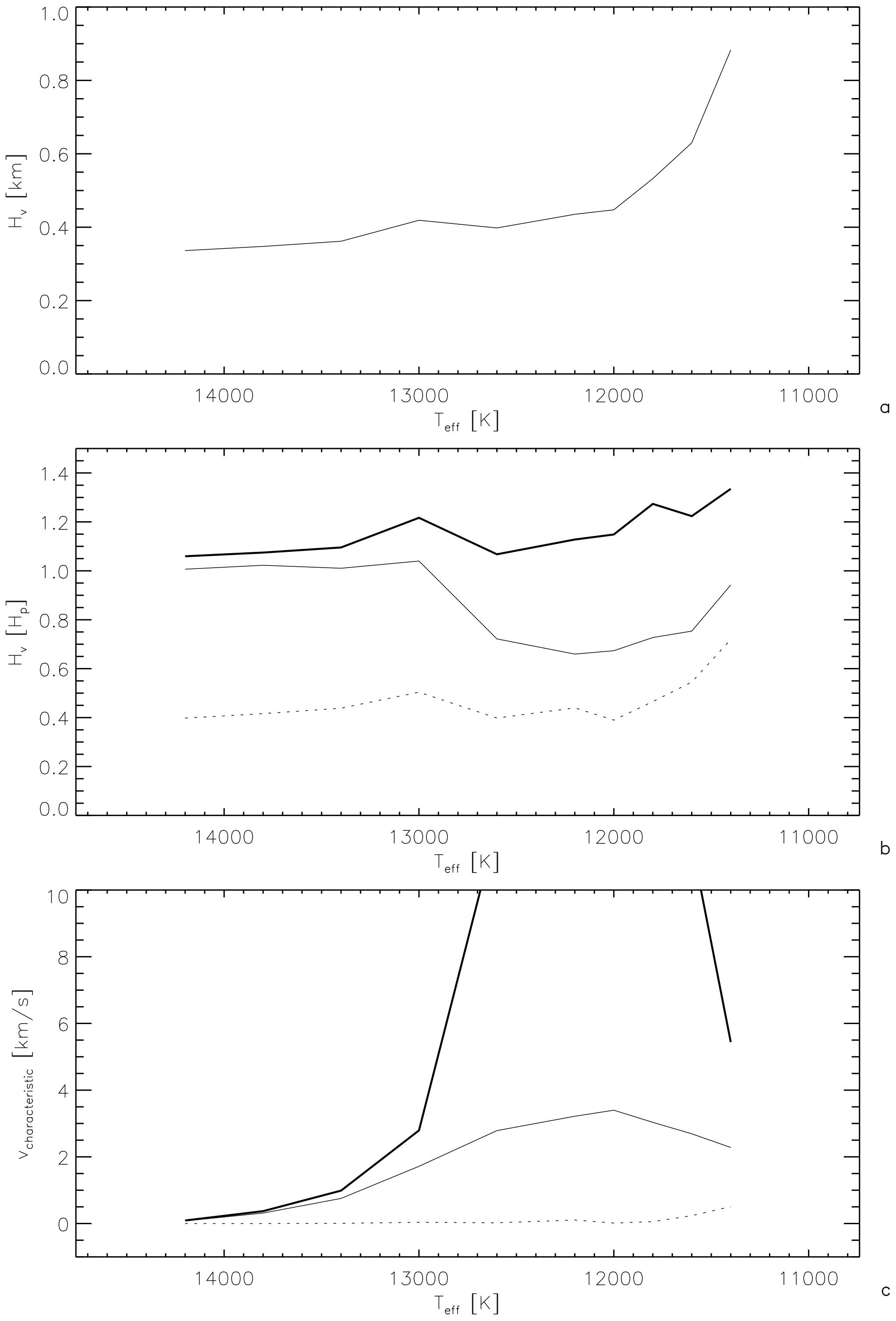


Abbildung 71: Geschwindigkeitsskalenhöhe als Funktion der Effektivtemperatur T_{eff} für Weiße Zwerge vom Typ DA mit $\log g = 8.0$. a) Skalenhöhe des rms-Wertes der Vertikalgeschwindigkeit in Kilometern als Funktion der Effektivtemperatur. Diese Größe wurde auch zur Extrapolation des Geschwindigkeitsfeldes in Bild 58 benutzt. b) Vertikalgeschwindigkeitsskalenhöhe in Einheiten verschiedener Druckskalenhöhen H_p: Gestrichelte Linien: H_p am Boden des jeweiligen Modells, Dicke Linie: H_p am unteren Rand der instabilen Zone, Dünne Linie: H_p an der Position der unteren Nullstelle des Enthalpieflusses (siehe Abb. 58). c) Charakteristische Geschwindigkeiten, die zusammen mit den Skalenhöhen aus Bild b jeweils den gleichen Geschwindigkeitsverlauf ergeben.

im Laufe seiner Entwicklung immer mehr abkühlt, und die Oberflächenkonvektionszone in immer tiefere Schichten vordringt. Erreicht sie die Heliumschale, mischt sie es in die Wasserstoffatmosphäre. Da die Gesamtmasse von Helium wesentlich größer ist als die von Wasserstoff, kann auf diese Weise ein Weißer Zwerg vom Spektraltyp DA (Wasserstoff-Spektrum) zu einem vom Spektraltyp DB (Helium-Spektrum) werden.

Aktuelle Pulsationsuntersuchungen (siehe z.B. Fontaine et al. 1994) finden jedoch eine dickere Wasserstoffschale als frühere Arbeiten, und so ist nicht zu erwarten, daß schon innerhalb des Effektivtemperaturbereichs meiner Modelle ($14200\,\mathrm{K} \geq T_{\mathrm{eff}} \geq 11400\,\mathrm{K}$) die Wasserstoff-Helium-Übergangsschicht von der Wasserstoffkonvektionszone erreicht werden kann. Aus Abbildung 59 kann man auf eine Mindestdicke der Wasserstoffschale von $10^{-13} M_*$ schließen. Aber auch bei kühleren Effektivtemperaturen, als sie in der bisherigen Modellsequenz enthalten sind, muß mit einem ausgedehnten Overshoot-Gebiet unterhalb der von der Mischungswegtheorie vorausgesagten Konvektionszone gerechnet werden.

Die Photosphäre einen Weißen Zwerges kann nicht nur durch das Hochmischen schwerer Elemente sondern auch beim Durchqueren einer interstellaren Wolke durch einfallendes Material kontaminiert werden (Paquette et al. 1986). Die Berechnung der Auswirkungen solch eines Zusammenstoßes oder auch des radiativen Auftriebs auf die photosphärische Zusammensetzung setzt nun aber die genaue Kenntnis der effektiven Masse der Konvektionszone voraus. Zwischen den Voraussagen der Masse der Konvektionszone verschiedener Versionen der Mischungswegtheorie kann es Unterschiede bis zu einem Faktor 10^5 geben (z.B. für einen Helium-reichen Weißen Zwerg mit $0.6\,M_\odot$, $20000\,\mathrm{K}$, siehe Paquette et al. 1986). Durch die Strahlungs-Hydrodynamik-Modelle ist es nun immerhin in einem gewissen Effektivtemperaturbereich möglich, die Mischungswegtheorie zu kalibrieren und zugleich den zusätzlich hinzukommenden enorm ausgedehnten Overshoot-Bereich zu untersuchen.

9.5 Eindimensionale Diffusionsrechnungen

Anders als bei den Weißen Zwergen sind bei den Hauptreihen-A-Sternen die Zeitskalen und Stärken von Elementtrennungsprozessen so groß, daß diese zwar deutlich beobachtbare Häufigkeitsanomalien erzeugen, aber die Sternhülle nicht aller Spurenelemente berauben können. Außerdem ist die Masse der konvektiv homogen durchmischten Zone noch so klein, daß der Einfall selbst geringer Mengen an interstellarem Material zu merklichen Veränderungen der photosphärischen Elementzusammensetzung führen kann.

Und so findet man unter den A-Sternen zahlreiche Vertreter, die große Abweichungen von der solaren Zusammensetzung zeigen wie z.B. die FmAm-Sterne (Michaud et al. 1983, Charbonneau 1991) und die λ Bootis-Sterne (siehe Stürenburg 1993, Holweger und Stürenburg 1993, Charbonneau 1993). Aber auch die eigentlich „normalen" A-Sterne zeigen kleine Abweichungen von der solaren Elementmischung (Holweger und Stürenburg 1993, Holweger et al. 1994).

Die zeitliche und räumliche Entwicklung des Konzentrationsprofils eines Elements beschreibt man mit Hilfe einer erweiterten Diffusionsgleichung: Die allgemeine *Diffusionsgleichung*, die berücksichtigt, daß die Dichte, der Diffusionskoeffizient und die Diffusionsgeschwindigkeit von der Höhe abhängen, lautet für eindimensionale kartesische Geometrie (siehe Charbonneau 1993, Turcotte und Charbonneau 1993)

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho U_{\mathrm{tot}} c\right) \tag{9.19}$$

mit

$$U_{\text{tot}} = -D_{\text{tot}} \frac{\partial}{\partial z} (\ln c) + V_{\text{tot}} \quad . \tag{9.20}$$

Hier sind

c	:	Konzentration
D_{tot}	=	$D_{12} + D_{\text{conv}}$
D_{12}	:	thermischer Diffusionskoeffizient
D_{conv}	:	Diffusionskoeffizient nach Gl. (9.16) zur Beschreibung des konvektiven Mischens
V_{tot}	=	$V_{\text{sett}} + V_{\text{therm}} + V_{\text{rad}}$
V_{sett}	:	Absinkgeschwindigkeit durch Schwerkraft
V_{therm}	:	Separationsgeschwindigkeit durch thermische Effekte
V_{rad}	:	Geschwindigkeit durch radiativen Auftrieb .

Hinzukommen können noch Terme, die Akkretion, Massenverlust oder nukleare Prozesse beschreiben.

Während eines einmonatigen Gastaufenthaltes in Boulder, Colorado, hatte ich die Gelegenheit, das Programm von Paul Charbonneau (siehe Charbonneau und Michaud 1991) zur Integration der Gleichung (9.19) zu benutzen und zu modifizieren, um die mischende Wirkung des konvektiven Overshoot zu testen.

Für die Rechnungen ohne Overshoot habe ich die nur im Ein- und Ausgabeteil modifizierte Originalversion des Programms verwendet. Zur Modellierung des zusätzlichen Mischungseffektes habe ich ein Geschwindigkeitsprofil der Form

$$v(z) = 1\,\text{km/s}\, e^{\frac{z-z_0}{0.25 H_P(z_0)}} \tag{9.21}$$

verwendet, das den Geschwindigkeitsverlauf der A-Stern-Modelle AT85g44N2 und AT85g44N2 (siehe Abb. 66) im Overshoot-Bereich gut wiedergibt. Als Bezugspunkt z_0 habe ich den unteren Rand des instabilen Bereichs gewählt. Mit der charakteristischen Geschwindigkeit 1 km/s und der charakteristischen Zeitskala 10^4 s ergibt sich mit Gleichung (9.18) für den konvektiven Diffusionskoeffizienten im Overshoot-Gebiet

$$\boxed{D_{\text{overshoot}}(z) = 10^{14}\,\text{cm}^2/\text{s}\, e^{\frac{z-z_0}{0.125 H_P(z_0)}}} \quad . \tag{9.22}$$

Die Bilder 72 und 73 zeigen als repräsentative Beispiele für die durchgeführten Diffusionsrechnungen die Entwicklung der relativen Häufigkeit von Titan und Kalzium jeweils ohne (obere Graphik) und mit konvektivem Overshoot (untere Graphik). Gezeigt ist jeweils, wie sich die relative Elementkonzentration von der anfänglichen Gleichverteilung durch den Einfluß von Schwerkraft und Strahlungsauftrieb fortentwickelt, so daß in der oberflächennahen Konvektionszone Häufigkeitsanomalien entstehen, die dann auch in der Photosphäre beobachtbar sind. Als Abszisse ist die relative Sternmasse oberhalb der jeweiligen Massenschale gewählt. Links sitzt das Sterninnere. Rechts die Photosphäre. Die beiden gestrichelten Linien am oberen Bildrand geben die Untergrenzen der Helium- bzw. Wasserstoffkonvektionszone an. Die stabile Schicht zwischen beiden Konvektionszonen wird als vollständig durchmischt angenommen.

In den Modellen ohne Overshoot wird angenommen, daß der Diffusionskoeffizient D_{conv} innerhalb der Konvektionszone einen sehr großen Wert besitzt, der am unteren

Rand der instabilen Schicht schlagartig auf Null fällt, was zu dem Sprung in den relativen Konzentrationen an dieser Stelle führt. Der Einfluß des zusätzlichen Overshoot-Diffusionskoeffizienten auf die Entwicklung der Kalzium-Häufigkeit ist leicht überschaubar (Bild 72): Ohne Overshoot entsteht nach 10^7 Jahren eine Überhäufigkeit von etwa 100. Overshoot vergrößert die effektive Masse der Konvektionszone um etwa einen Faktor 10, so daß die Überhäufigkeit nach 10^7 Jahren nur noch einen Wert von 10 erreicht. Außerdem wird der Konzentrationssprung am Boden der Konvektionszone beseitigt.

Beim Titan ist der Einfluß des Overshoot weit dramatischer (Bild 73): Ohne Overshoot *sinkt* in der Photosphäre nach 10^7 Jahren die Titankonzentration auf 1/1000 ab. Dafür baut sich dicht unterhalb der Konvektionszone in einer dünnen Schicht eine Überhäufigkeit auf. Durch die Miteinbeziehung des konvektiven Überschießens wird die effektive Masse der Konvektionszone wieder verzehnfacht, so daß diese jetzt die Schicht mit der Titanüberhäufigkeit erreicht. Dadurch *erhöht* sich die photosphärische Titankonzentration jetzt um einen Faktor 25. Hier wird also nicht nur der Betrag der Häufigkeitsanomalie sondern sogar das Vorzeichen verändert.

Diese Beispiele zeigen zwar die enormen Auswirkungen des konvektiven Overshoot auf Diffusionsprozesse und auf die photosphärischen Häufigkeitsanomalien in A-Sternen, aber sie bieten leider noch keine Möglichkeit, die Ergebnisse anhand konkreter Beobachtungen zu prüfen. Die Diffusionsrechnungen können bisher zwar einige qualitative Deutungen für die beobachteten Anomalien liefern, aber sie vernachlässigen noch zu viele physikalische Effekte, als daß man mit ihrer Hilfe genaue quantitative Aussagen treffen kann. Ignoriert werden in den obigen Rechnungen u.a. nichtlineare Effekte, die zu einer Sättigung des Strahlungsauftriebs führen können, Akkretion oder Massenverlust, meridionale Zirkulation und Entwicklungseffekte.

Immerhin eliminiert die Einbeziehung des konvektiven Overshoot den physikalisch unrealistischen Konzentrationsgradienten am Boden der Konvektionszone und führt zu einer Vergrößerung der effektiven Masse der Konvektionszone um einen Faktor 10, was die theoretischen Häufigkeitsanomalien um mindestens diesen Faktor (abhängig vom betrachteten Element) reduziert, so daß sie jetzt näher an den beobachteten liegen, die sie sonst oft bei weitem übertreffen.

Für Weiße Zwerge konnte ich diese detaillierten Rechnungen nicht durchführen. Um aber wenigstens die Geschwindigkeitsamplitude der konvektiven Overshoot-Strömungen grob abzuschätzen, die gerade noch ausreicht, trennenden Mechanismen, die auf der Zeitskala $t_{\mathrm{separation}}$ ablaufen, entgegenzuwirken, genügt folgende Betrachtung: Die Zeitskala für diffusives Mischen ist

$$t_{\mathrm{mix}} \approx \frac{L^2}{D} = \frac{L^2}{t_{\mathrm{characteristic}}\, v_{\mathrm{characteristic}}^2} \quad . \tag{9.23}$$

Aus $t_{\mathrm{mix}} = t_{\mathrm{separation}} \approx 10^8\,\mathrm{s} \approx$ einige Jahre (siehe Paquette et al. 1986), $L \approx 1\,\mathrm{km}$ und $t_{\mathrm{characteristic}} \approx 1\,\mathrm{s}$ folgt dann $v_{\mathrm{characteristic}} = 10\,\mathrm{cm/s}$ als Geschwindigkeit, bei der sich trennende und mischende Einflüsse gerade die Waage halten. Diese Überlegung besitzt natürlich nur qualitativen Charakter. Sie müßte eigentlich die Variation der charakteristischen Zeitskala und Geschwindigkeit mit der Effektivtemperatur berücksichtigen und vor allem das gravitative Absetzen für jedes Element und jedes Sternmodell einzeln berechnen.

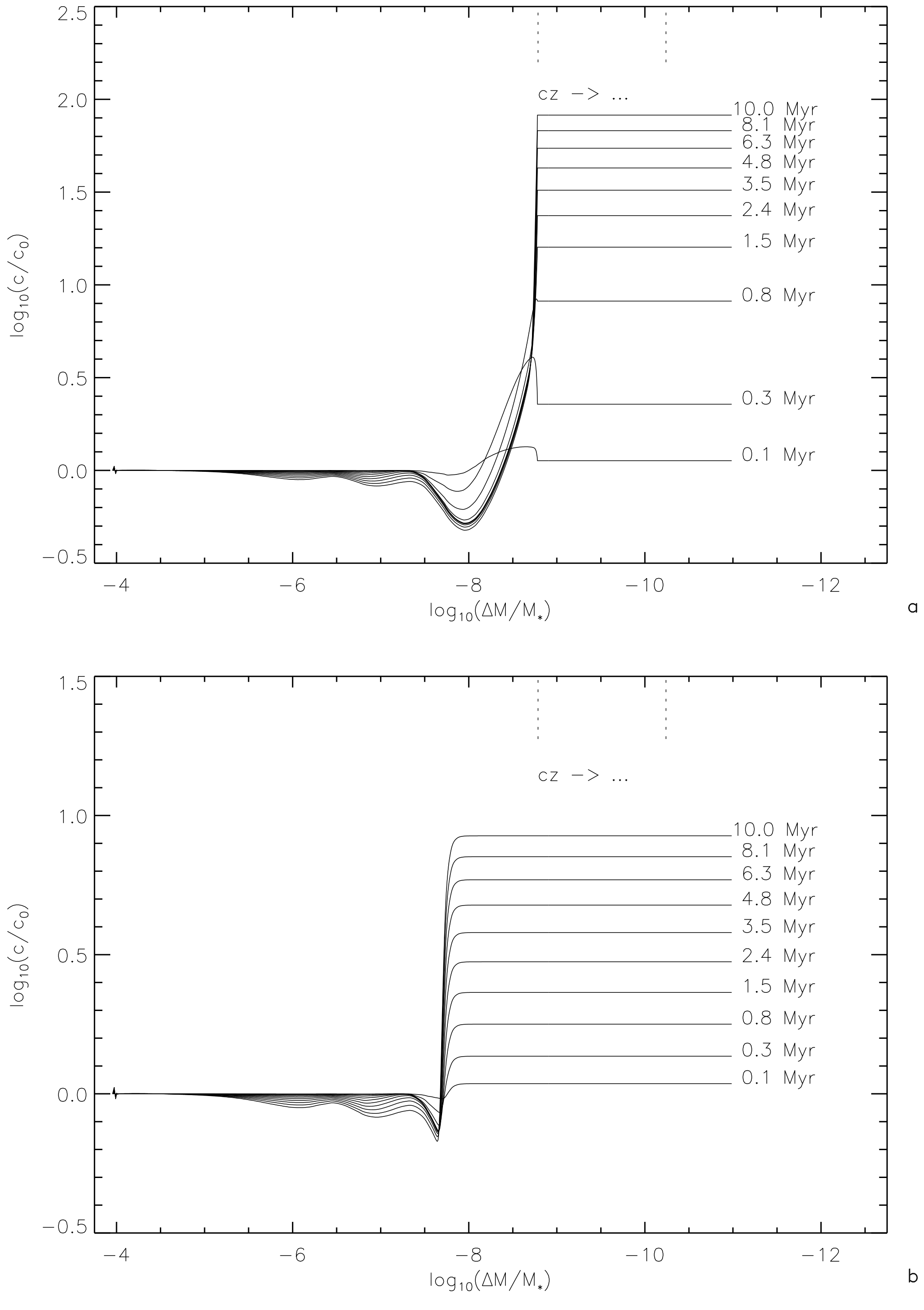


Abbildung 72: Relative Kalzium-Konzentration als Funktion der relativen Sternmasse für zehn ausgewählte Zeitpunkte für einen A-Stern mit $T_{\rm eff} = 7943\,$K, $\log g = 4.38$.
a) MLT ohne Overshoot, vergleiche mit Bild 2a aus Turcotte und Charbonneau (1993), b) mit Overshoot.

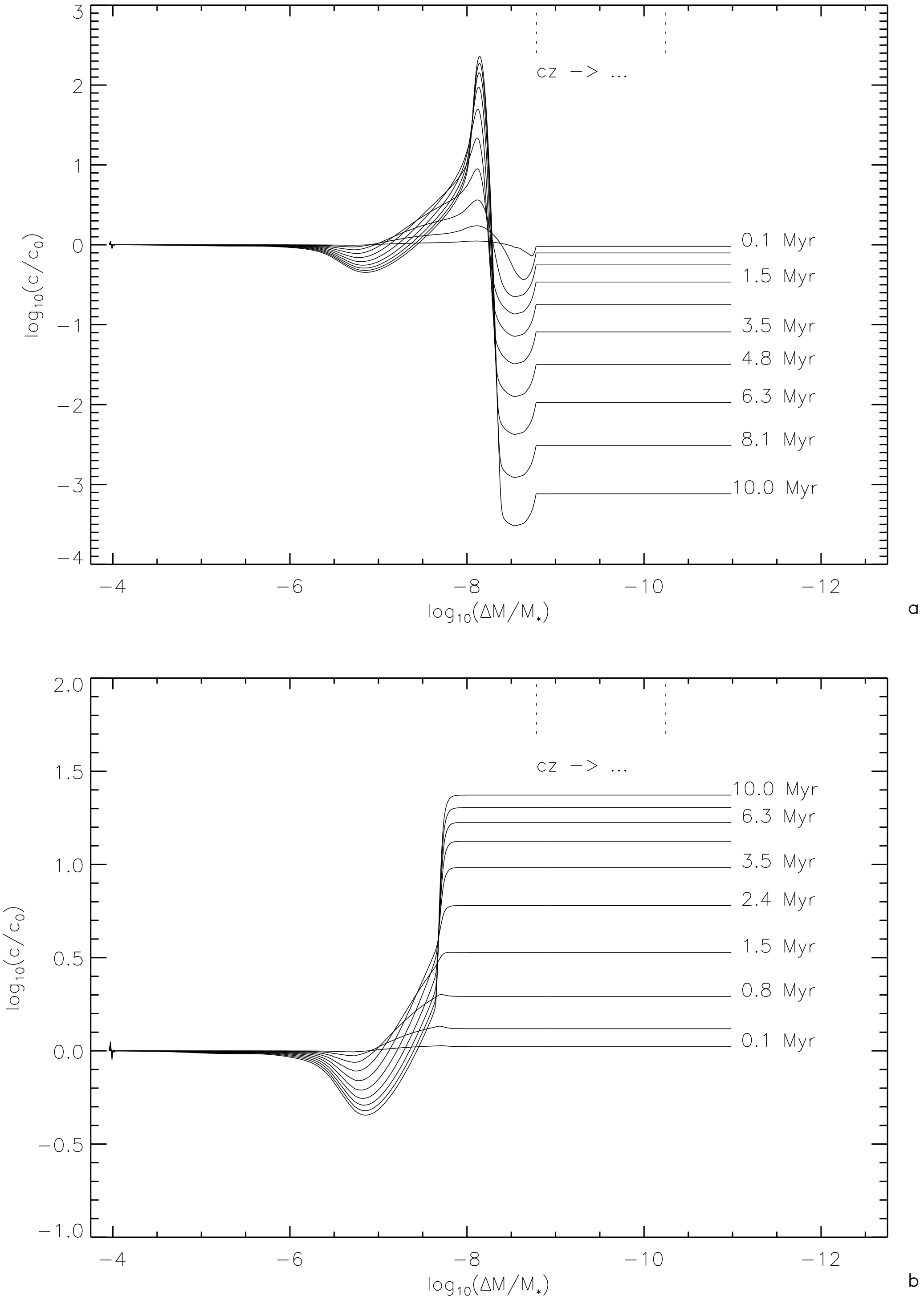


Abbildung 73: Relative Titan-Konzentration als Funktion der relativen Sternmasse für zehn ausgewählte Zeitpunkte für einen A-Stern mit $T_{\text{eff}} = 7943\,\text{K}$, $\log g = 4.38$.
a) MLT ohne Overshoot, b) mit Overshoot.

10 Konvektion und Pulsationen

Neben den konvektiven Strömungsformen finden sich in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen auch zahlreiche Schwingungsphänomene, auf die ich in diesem Kapitel kurz eingehen werde.

10.1 Ein typisches Modenspektrum

In diesem Abschnitt will ich nur kurz einige Moden eines repräsentativen Modells eines Weißen Zwerges (ZT134g80N1) vorstellen (siehe Abb. 74). Dargestellt sind die Vertikalgeschwindigkeitsamplituden einiger ausgewählter nichtplanparalleler Eigenmoden über der Höhe z, die mit dem im Kapitel 4 beschriebenen Programm berechnet wurden. Rechts daneben ist die Bezeichnung der Mode und die Periode P für die oszillierenden bzw. die Anwachszeit T für die exponentiell ansteigenden Moden aufgetragen.

Von den vier g^--Moden ist nur diejenige ohne vertikalen Knoten relevant. Ihr Vertikalgeschwindigkeitsprofil ähnelt sehr dem Verlauf der rms-Vertikalgeschwindigkeit bei voll entwickelter Konvektion. Diese Moden besitzen nur im instabilen Gebiet große Amplituden. Nach oben und unten hin ins stabile Gebiet zeigen sie einen exponentiellen Abfall.

Genau umgekehrt verhalten sich die g^+-Moden: Sie besitzen nur im stabilen Gebiet große Amplituden und durchtunneln die instabile Zone. Teilweise treten sie in Paaren mit recht ähnlichen Frequenzen auf, wobei die eine Mode unterhalb und die andere Mode oberhalb der Konvektionszone eine große Amplitude besitzt. Sie sind, wie auch die f-Mode und die p-Moden, tatsächlich Schwingungen.

Die f-Mode tritt in des Simulationsrechnungen auf (siehe unten). Sie wird von den Konvektionsströmungen erzeugt. Sie besitzt große Ähnlichkeit mit den g^+-Moden.

Im Vergleich zu den Schwerewellen zeigen die Schallwellen (p-Moden) ein monotones Verhalten bei wachsender vertikaler Knotenzahl.

10.2 Einschwingvorgänge

Startet man einen neuen Simulationslauf nicht mit dem Endmodell eines vorangegangenen sondern mit einem Modell, das man z.B. durch Integration der Gleichungen für die graue hydrostatische Schichtung oder durch Interpolation einer Schichtung gewonnen hat, so zeigt es aufgrund von Rundungsfehlern unweigerlich kleine Abweichungen vom numerisch exakten Druckgleichgewicht. Diese Druckstörungen zeigen sich dann während der Simulation als abklingende planparallele Schwingungen, die sich als *p-Moden* identifizieren lassen.

Um sie näher zu studieren und um tatsächlich (nahezu) statische Anfangsmodelle zu erzeugen, habe ich eine ganze Reihe von eindimensionalen Rechnungen durchgeführt (Tabelle 4 bis 7). In Abbildung 75 ist als Beispiel der zeitliche Verlauf der Vertikalgeschwindigkeit am obersten Punkt des 1D-Modells TST42 (A-Stern, $T_{\text{eff}} = 9000\,\text{K}$, $\log g = 3.90$, offener Deckel) und das zugehörige Powerspektrum (bzw. seine Quadratwurzel) dargestellt. Die Grundmode (ohne inneren Knoten) besitzt die größte Amplitude und bleibt am längsten sichtbar. Anfangs liefern auch höhere Moden noch einen Beitrag, die sich auch im Powerspektrum durch drei weitere Peaks bemerkbar machen.

Die Moden verlieren ihre Energie durch viskose und Strahlungsdämpfung aber auch durch den bei diesem Modell für Schallwellen weitgehend transparenten Deckel (Randbedingung (4.50)).

Auch in den heißen 2D-Modellen Weißer Zwerge (siehe Abb. 45) finden sich anfangs diese gedämpften Schwingungen.

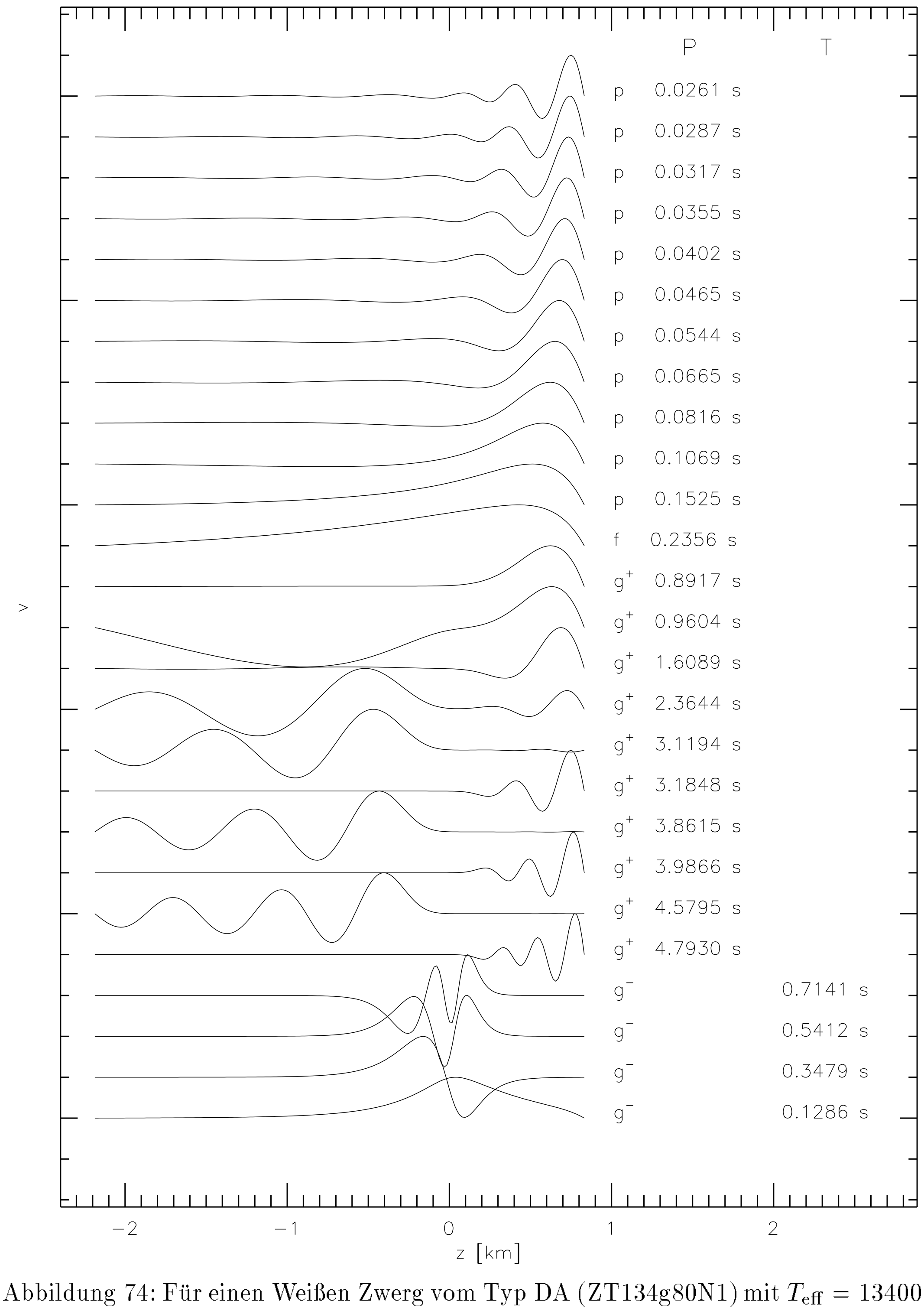


Abbildung 74: Für einen Weißen Zwerg vom Typ DA (ZT134g80N1) mit $T_{\rm eff} = 13400\,$K, $\log g = 8.00$, grauen Opazitäten ist der normierte Verlauf der Vertikalgeschwindigkeitsamplitude, der Typ der Mode und die Periode P bzw. die Anwachszeitskala T angegeben. Die horizontale Wellenlänge der Moden ist 6.8 km, also die gesamte Modellbreite.

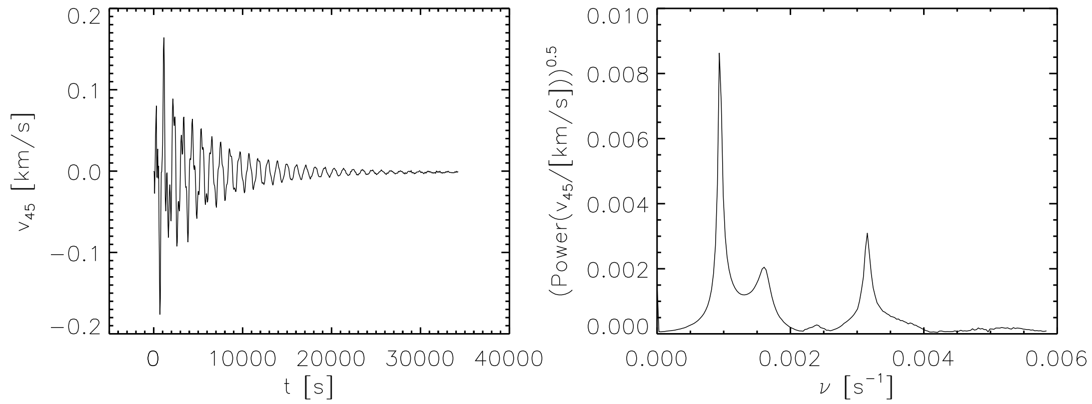


Abbildung 75: Für den obersten Punkt des eindimensionalen Modells TST42 (A-Stern, $T_{\rm eff} = 9000\,\mathrm{K}$, $\log g = 3.90$, offener Deckel) ist die Vertikalgeschwindigkeit über der Zeit in der linken Graphik dargestellt. Die rechte zeigt die Wurzel aus dem zugehörigen Powerspektrum.

10.3 Wachsende planparallele Schwingungen

Das Abklingen der anfänglichen Druckstörungen ist natürlich ein relativ langweiliger und für reale Sterne uninteressanter Vorgang. Beim Übergang zu A-Stern-Modellen mit geringeren Effektivtemperaturen zeigt sich jedoch ein ganz anderes Verhalten: Die Pulsationen klingen nicht mehr ab, sondern wachsen bis zu einer gewissen Sättigungsgrenze weit im nichtlinearen Bereich an (siehe Bild 76) und halten sich dann auf konstanter Amplitude von einigen Kilometern pro Sekunde.

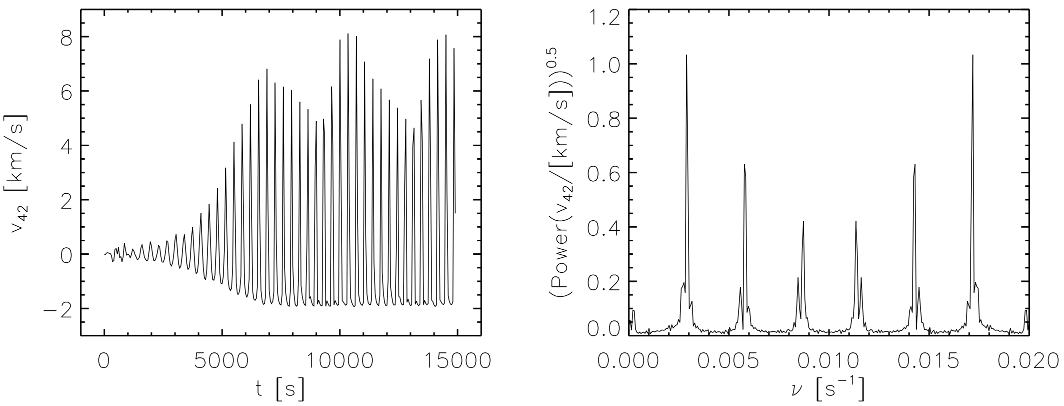


Abbildung 76: Für einen Punkt dicht unter dem Deckel des eindimensionalen Modells TST36 (A-Stern, $T_{\rm eff} = 8500\,\mathrm{K}$, $\log g = 3.90$, geschlossener Deckel) ist die Vertikalgeschwindigkeit über der Zeit in der linken Graphik dargestellt. Die rechte zeigt die Wurzel aus dem zugehörigen Powerspektrum. Die wachsende Mode hat eine Periode von ca. 347 s. Die Amplitude wird stationär. Die Schwankungen in der Maximalgeschwindigkeit links sind auf die grobe Sampling-Schrittweite von 20 s zurückzuführen. Die dominierende Mode besitzt eine Reihe von Oberwellen, deren Frequenzen z.T. über der Nyquist-Frequenz von $0.01\,\mathrm{s}^{-1}$ liegen, was den in der rechten Graphik erkennbaren Aliasing-Effekt verursacht.

Die Anwachsraten hängen von der Art der oberen Randbedingung ab, denn ein Deckel, der akustischen Energiefluß nach außen erlaubt, verhindert bzw. erschwert das Anwachsen der Pulsationen. Auch die Tiefe des Modells spielt eine Rolle: Mit wachsender im Modell enthaltener Masse wird die Anwachszeit größer.

Auch diese Schwingungen sind *p-Moden*. Die dominierende Mode in Abbildung 76 besitzt eine Periode von 347 s und zwei innere Knoten. Ich halte diese Art von Schwingungen nicht für numerische Störungen, sondern für den gleichen Typ von Pulsationen und von einem ähnlichen Anregungsmechanismus erzeugt, wie er bei den veränderlichen Sternen im Cepheiden-Instabilitätsstreifen zu finden ist. Einen ersten Hinweis darauf gibt die Abhängigkeit von der Effektivtemperatur: Die kühleren Modelle sind die instabileren, wie man es in der Nähe der roten Kante des Instabilitätsstreifens auch erwartet. Die Schwingungsperiode ist zwar wesentlich kürzer als die der klassischen Cepheiden, aber vergleichbar mit der der erst in jüngster Vergangenheit als solche erkannten schnell oszillierenden A-Sterne, von denen immer mehr entdeckt und analysiert werden (siehe z.B. Kurtz 1989 und 1990) und die direkt auf der Hauptreihe liegen. Die Pulsationen dieser Sterne beziehen ihre Energie durch den κ-Mechanismus (siehe Stellingwerf 1979, Cox 1980, Li und Stix 1994), der in den oberflächennahen Ionisationszonen Energie aus dem Strahlungsfeld in mechanische Energie transformieren kann. Zwar enthalten meine relativ flachen Modelle nur die Wasserstoffionisationszone, aber da deshalb auch die träge Masse einer Mode klein ist, ist selbst die geringe Antriebskraft dieser Ionisationszone in der Lage, die Amplitude einer Mode innerhalb kurzer Zeit wachsen zu lassen. Außerdem erstreckt sich die Photosphäre bis in optisch dünne Schichten, was die Effektivität des κ-Mechanismus in der Wasserstoffionisationszone in linearen Untersuchungen (Li und Stix 1994) begünstigt.

Bei Verwendung tieferer zweidimensionaler Modelle, die allerdings wegen der langen erforderlichen Simulationszeiträume einen erheblichen Rechenaufwand erfordern, wird es demnächst möglich sein, die Wechselwirkung von stellaren Pulsationen und Konvektion nicht mit einem Rückgriff auf erweiterte Mischungswegformalismen sondern konsistent mit Hilfe der Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen numerisch zu simulieren.

10.4 Erzeugung von Schallwellen in A-Sternen

Die stehenden Schallwellen in der Sonne beziehen ihre Energie nicht durch einen κ-Mechanismus, sondern durch stochastische Anregung direkt aus den konvektiven Strömungen. Dieser Prozeß arbeitet auch bei heißeren Sternen, solange die Konvektion noch eine gewisse Vehemenz besitzt. Da die konvektiven Geschwindigkeiten bei den kühlen A-Sternen besonders hoch sind, sind sie die idealen Demonstrationsobjekte. Der Vorgang der Schallerzeugung läßt sich besonders gut mit Hilfe einer Video-Animation demonstrieren, aber ich habe versucht, ihn auch in einer kleinen Sequenz aus vier Paaren von Schnappschüssen (Abbildung 77) hier darzustellen.

Der erste Zeitpunkt ($t = 2500\,\mathrm{s}$) liegt 100 s nach dem im Bild 32 gezeigten. An den Strömungsbildern mit eingezeichneten Isothermen links sieht man, wie der rechte kleine Jet vom großen linken eingesaugt wird, so daß beide verschmelzen und kurzzeitig einen tiefreichenden Abströmkanal mit sehr hohen Geschwindigkeiten bilden.

Auf der rechten Seite sind für den jeweiligen Zeitpunkt (ein Zähler befindet sich in der Mitte zwischen den Bildern) die lokalen Abweichungen des Druckes vom horizontalen Mittel als Grauplot dargestellt. Hier wurden die Grauwerte so gesetzt, daß schon kleine Fluktuationen deutlich sichtbar werden. Überdruckgebiete sind hell, Unterdruckregionen dunkel eingefärbt. Die großflächigen, fast schwarzen Unterdruckgebiete werden durch den großen Wirbel in der linken Bildhälfte und die kleinen in der Nähe der Abströmkanäle gebildet. Der Unterdruck entsteht durch die Zentrifugalkräfte der rotierenden Strömungen, die ihr Zentrum („das Tiefdruckgebiet im Auge des Taifuns“)

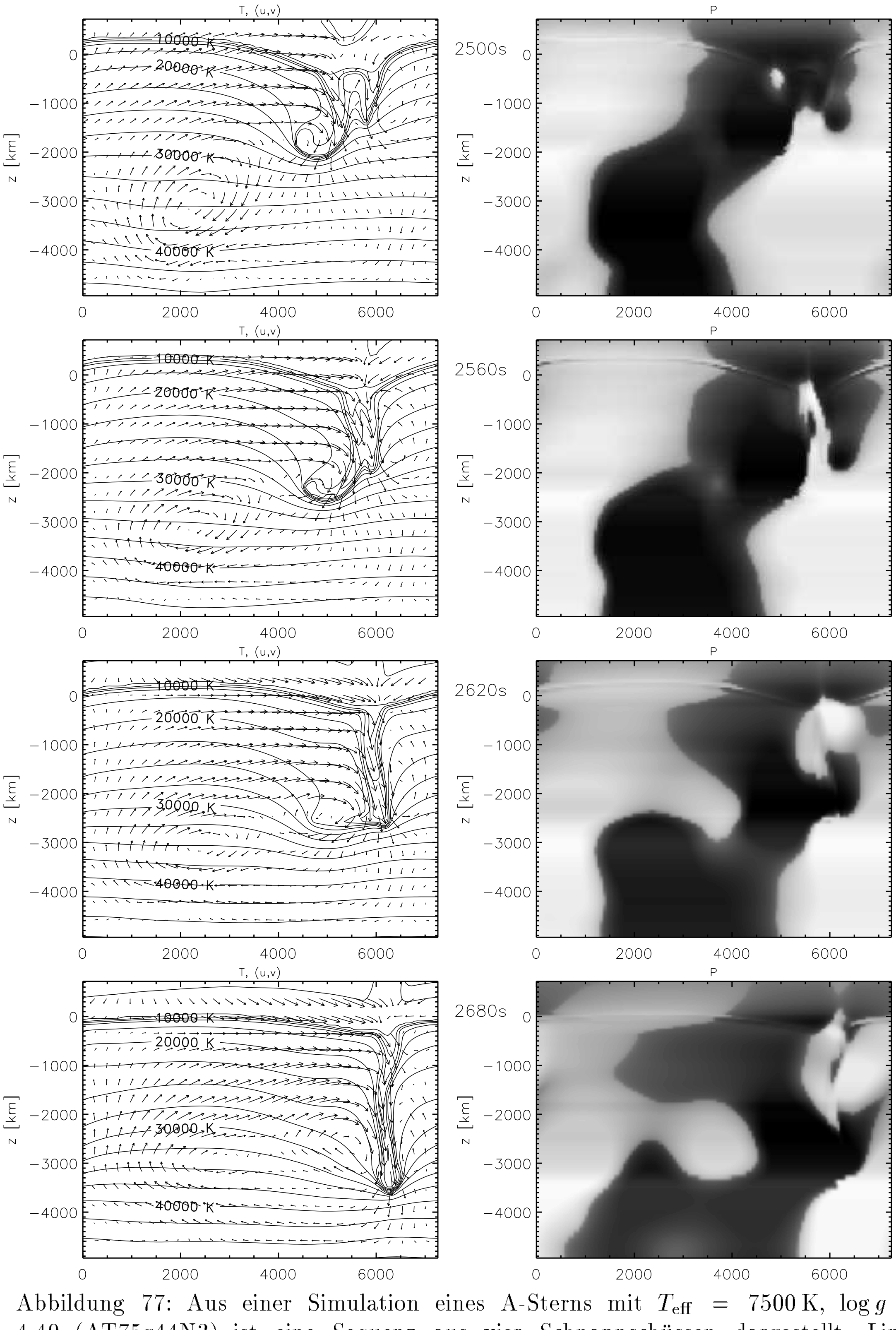


Abbildung 77: Aus einer Simulation eines A-Sterns mit $T_{\rm eff} = 7500\,{\rm K}$, $\log g = 4.40$ (AT75g44N3) ist eine Sequenz aus vier Schnappschüssen dargestellt. Links ist jeweils das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld aufgetragen. $v_{\rm max} = (22.0, 22.1, 26.8, 31.1)\,{\rm km/s}$. Die rechte Spalte zeigt die dazugehörigen Druckfluktuationen. Bei $x \approx 6000\,{\rm km}$, $z \approx -500\,{\rm km}$ wird nach dem Verschmelzen zweier Jets eine Schallwelle ausgesandt.

teilweise evakuieren.

Der interessante Vorgang spielt sich nun jeweils rechts oben bei $x \approx 6000\,\mathrm{km}$, $z \approx -500\,\mathrm{km}$ ab. Zum ersten Zeitpunkt sind die Jets noch getrennt, sie zeigen keine auffälligen Druckfluktuationen. Bei $t = 2560\,\mathrm{s}$, kurz vor dem vollständigen Verschmelzen, bilden sie kurzzeitig ein einzelnes Abströmgebiet mit der doppelten Breite. Der Druck hat sich schon deutlich erhöht (siehe das helle senkrechte Band im rechten Bild). Nach dem nächsten Zeitschritt hat der Jet schon fast wieder seinen normalen Durchmesser, aber die Maximalgeschwindigkeit hat sich von 22.1 km/s auf 26.8 km/s erhöht. Die Druckerhöhung ist nicht mehr auf den Abströmkanal konzentriert, sondern beginnt sich in das umgebende Medium auszubreiten. Im letzten Doppelbild hat der Jet wieder seinen Standarddurchmesser erreicht, aber seine vertikale Tiefenerstreckung ist gewachsen, und die maximale Geschwindigkeit ist weiter auf 31.1 km/s gestiegen. Die Mach-Zahl im Jet ist etwa 2. Die Mach-Zahl im photosphärischen Schock, der während des Verschmelzungprozesses deutlich verstärkt wird, übersteigt dicht unterhalb des Deckels sogar den Wert 4. Der Bereich der positiven Druckfluktuation hat sich weiter ausgedehnt. Dagegen beginnt sich der Druck innerhalb des Jets bereits zu normalisieren.

Im folgenden breitet sich die entstandene Druckfluktuation als Schallwelle weiter aus. Dabei nimmt ihre Amplitude jedoch so ab, daß sie in einem statischen Bild nur noch sehr schwer erkennbar ist. Anhand einer Video-Animation kann man aber verfolgen, wie sie das gesamte Modellvolumen durchquert. Sie breitet sich auch in die Photosphäre aus. Allerdings wird ihre Amplitude dort so gedämpft, daß sie in der gewählten Darstellung nicht sichtbar ist.

Auch in den mit 8500 K schon deutlich heißeren A-Sternen, die eine wesentlich schwächere Konvektion zeigen, läßt sich die Erzeugung einer Schallwelle verfolgen, die sich — allerdings mit sehr geringer Amplitude — nahezu als Kugelwelle in das umgebende Medium ausbreitet.

Die genauso auch in den solaren Modellen stattfindende Schallproduktion führt zu einem erheblichen akustischen Fluß, dessen Betrag ausreichen würde, um die Chromosphäre zu heizen (siehe Steffen 1994).

In den Modellen Weißer Zwerge wird dieser Schallerzeugungmechanismus nicht beobachtet, obwohl auch hier Modelle mit effizienter Konvektion mit vehementen Geschwindigkeiten vorliegen. Auch dies mag mit dem plötzlichen Temperatursprung (siehe Seite 142) am Boden der A-Stern-Photosphären zusammenhängen, der mit in die Abströmgebiete hineingerissen wird. Der Sprung ist in dieser Stärke bei den Weißen Zwergen nicht vorhanden, und so gibt einen deutlichen Unterschied in der Temperaturstruktur im Inneren einen Abströmkanals zwischen A-Sternen und Weißen Zwergen, was dann auch ein anderes Verhalten bei der Schallaussendung zur Folge haben könnte. Außerdem ist die Mach-Zahl in den Abströmkanälen von Weißen Zwergen typischerweise deutlich kleiner als in denen der A-Sterne.

Das Verschmelzen zweier Jets ist also ein geradezu explosiver Vorgang, der zu einer kurzzeitigen deutlichen Erhöhung der Abströmgeschwindigkeit im Jet und zur Emission von Schallwellen führt. Im Gegensatz dazu ist die Entstehung eines neuen Abströmgebietes aufgrund der konvektiven Instabilität und der Übergang ins nichtlineare Regime ein vergleichbar harmloser Prozeß, der von keiner erkennbaren Schallaussendung begleitet wird. Das steht im deutlichen Gegensatz zu den Arbeiten von Rast und Toomre (1993) und Rast et al. (1993), in der die Bildungphase eines neuen Jets für die Emission verantwortlich gemacht wird. Das ist umso erstaunlicher, als die übrigen Ergebnisse und insbesondere die Beschreibung der konvektiven Dynamik mit meinen Resultaten hervorragend übereinstimmen.

10.5 Anregung der f-Mode in Weißen Zwergen

Zwar werden in den Modellen Weißer Zwerge keine Schallwellen erzeugt. Dafür tritt aber sehr deutlich die Fundamental-Mode mit einer horizontalen Wellenlänge gleich der gesamten Modellbreite auf (siehe Abb. 78).

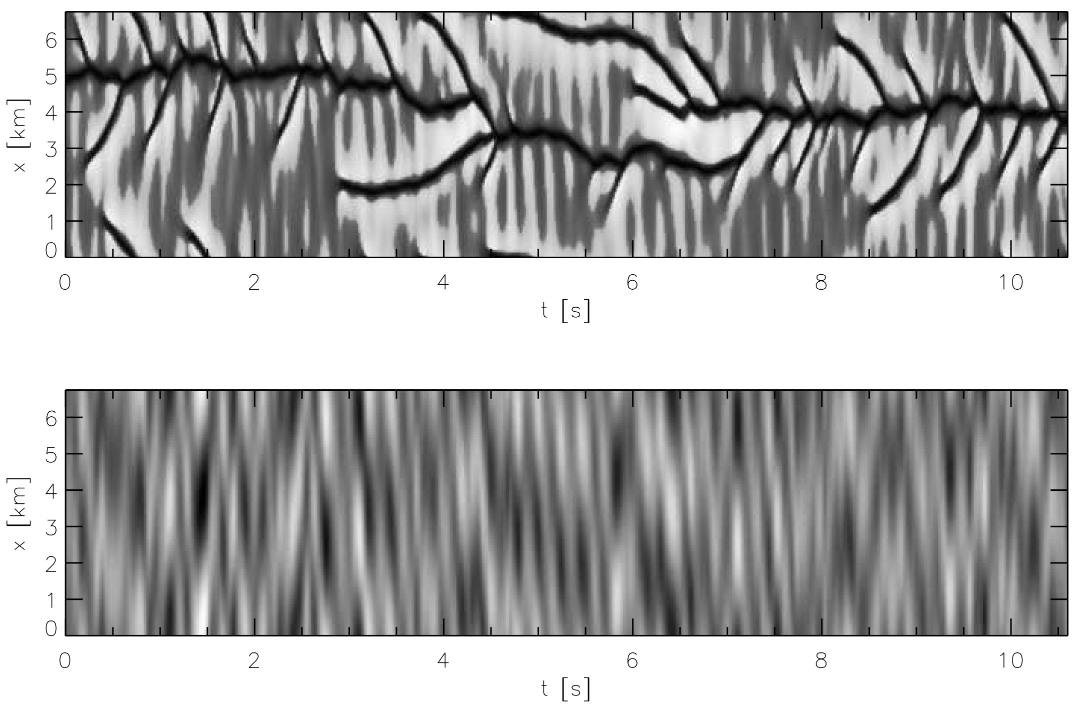


Abbildung 78: Für einen Weißen Zwerg vom Typ DA (ZT122g80N2) mit $T_{\rm eff} = 12200$ K, $\log g = 8.00$, nichtgrauen Opazitäten ist die Vertikalgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit t (Abszisse) und der Horizontalkoordinate x (Ordinate) als Graustufenplot dargestellt. Im oberen Bild wurden kleine Geschwindigkeitswerte durch eine entsprechende Skalierung hervorgehoben (etwas stärker als in Abb. 45). Man erkennt die Wanderung und Entwicklung der Abströmgebiete als schwarze baumartige Struktur und vor allem in den Aufströmgebieten die Oszillationen, die sich als f-Mode mit einer Periode von ca. 0.22 s identifizieren lassen. Um diese Schwingungen noch genauer herauszuarbeiten, habe ich im unteren Bild die Spur der Jets durch Maskierung unterdrückt und die f-Mode durch Fourieranalyse/-synthese optisch verstärkt.

Dieser Schwingungstyp ist mit den Schwerewellen verwandt: Auf- und Ab-Bewegungen der Materie im Schwerefeld spielen eine wichtige Rolle. Obwohl die Schwingung deutlich als Eigenmode des Simulationsvolumens erkennbar ist, gibt es fortlaufend Veränderungen: Sie wird gedämpft, bezieht neue Energie aus einem tief hinabschießenden Abströmkanal nach dem Verschmelzen zweier Abströmgebiete, kann ihr Ausbreitungsverhalten (horizontal stehend oder laufend) und ihre Phase ändern.

Diese Mode ist als Eigenschwingung des Simulationsvolumens natürlich in gewisser Weise ein Artefakt der künstlichen Randbedingungen. Trotzdem hat dieser Prozeß als Paradebeispiel für eine stochastische Anregung von Schwingungen auch für reale Sterne eine große Bedeutung und verdient weitere Untersuchung.

Die Amplitude der Mode steigt mit wachsender Vehemenz der Konvektion bei Verringerung der Effektivtemperatur. In kühleren Modellen reichen die Ausläufer der Abströmkanäle tiefer an den Modellboden heran, und die konvektiven Strömungen werden turbulenter. Damit wächst die Häufigkeit und Stärke der Wechselwirkungprozesse mit der f-Mode, und ihre Phase und Amplitude zeigen ein deutlich irreguläreres Verhalten.

Auch in den tiefen A-Stern-Modellen, die nur die untere Konvektionszone enthalten, läßt sich die Fundamental-Mode nachweisen.

10.6 Blaue Kante des ZZ Ceti-Instabilitätsstreifens

Die aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen gewonnenen mittleren Schichtungen der äußersten Hülle Weißer Zwerge von Spektraltyp DA bieten eine weitere interessante Möglichkeit: Durch Hinzufügen einer hydrostatischen inneren Schichtung lassen sich mit ihrer Hilfe Modelle der gesamten Hülle Weißer Zwerge konstruieren, die frei sind von Unsicherheiten der Mischungswegtheorie. Mit diesen zusammengesetzten Modellen lassen sich lineare *nichtadiabatische* Stabilitätsanalysen durchführen, um so die Grenz-Effektivtemperatur festzulegen, unterhalb derer instabile Moden auftreten können.

Vorläufige Untersuchungen finden auf diese Weise eine blaue Kante des ZZ Ceti-Instabilitätsstreifens zwischen $T_{\mathrm{eff}} = 12\,600\,\mathrm{K}$ und $12\,200\,\mathrm{K}$ bei $\log g = 8.0$ (Gautschy und Ludwig 1995). Weitere sollen folgen (Gautschy, Ludwig und Freytag 1995, in Vorbereitung).

11 Fazit

11.1 Schlußfolgerung

Mit Hilfe eines ausgefeilten Programmes wurden auf leistungsfähigen Rechnern aufwendige zweidimensionale instationäre Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen einer ganzen Reihe von Modellen der oberflächennahen Konvektionszonen von Hauptreihen-A-Sternen und Weißen Zwergen vom Typ DA durchgeführt.

Die unterschiedlichen Konvektionszonen wurden auf ihre von Effektivtemperatur und Schwerebeschleunigung abhängige Struktur und Dynamik hin untersucht. U.a. wurde demonstriert, wie der Prozeß der Schallerzeugung in Hauptreihensternen abläuft und welche Vielzahl von Schwingungsphänomenen bei den Simulationen eine Rolle spielt.

Räumlich und zeitlich gemittelte Größen aus den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen, die die vertikale Struktur der Konvektionszone beschreiben, wurden mit den Aussagen der lokalen Mischungswegtheorie verglichen. Zwar kann die Mischungswegtheorie mit einem Mischungswegparameter von etwa 1.5 für den betrachteten Effektivtemperatur- und Schwerebeschleunigungsbereich Weißer Zwerge charakteristische Größen wie den maximalen konvektiven Fluß, die maximale Vertikalgeschwindigkeit oder die Tiefe der instabilen Schicht mit geradezu erstaunlicher Genauigkeit wiedergeben.

Das kann aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Mischungswegtheorie mit dem selben Mischungswegparameter die Stärke der Konvektion bei Hauptreihensternen stark überschätzt und daß vor allem die globale vertikale Struktur wie auch die gesamte Tiefenausdehnung aller Konvektionszonen vollkommen falsch vorausgesagt wird.

Das liegt daran, daß die dynamischen „Bausteine“ einer Konvektionszone keine Blasen sind, die entstehen, auf- oder absteigen und sich wieder auflösen, wie es dem Mischungswegbild entspricht, sondern sich über mehrere Druckskalenhöhen erstreckende Abströmkanäle, die oberflächennahes Material geringer Entropie bis in große Tiefen befördern können. Das Wechselspiel zwischen konvektiver Instabilität, die neue Abströmkanäle in Gebieten mit geringen Aufwärtsgeschwindigkeiten entstehen läßt, und der horizontalen Advektion, die sie in bereits bestehende hineintreibt und sie verschmelzen läßt, bestimmt die konvektive Dynamik und den mittleren Abstand zweier Jets. Der Durchmesser eines Jets scheint dagegen mit der horizontalen Wellenlänge der konvektiven Eigenmode mit der größten Wachstumsrate zusammenzuhängen. Solch ein Instabilitätsmaximum existiert, weil Moden mit großer horizontaler Ausdehnung nur einen geringen Antrieb durch Auftriebskräfte erfahren, während die kleinen Wellenlängen durch die dann zunehmend effektiver werdende Strahlungsdämpfung gehemmt werden.

Durch keine noch so raffinierte Modifikation der Mischungsweglänge ist es im Rahmen der lokalen Mischungswegtheorie möglich, die sich in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen einstellende vertikale Struktur einer Konvektionszone zu modellieren. Eine Theorie, die dazu in der Lage ist, muß in mehreren Punkten gegenüber der Mischungswegtheorie erweitert werden:

Als erstes und wichtigstes muß die Annahme der Lokalität fallengelassen und die *Nichtlokalität* des Problems voll berücksichtigt werden. In der Energiebilanz muß diese Nichtlokalität berücksichtigt werden: Kinetische Energie kann an einer Stelle durch Auftrieb erzeugt, forttransportiert und an anderer Stelle durch Auftrieb oder (turbulente) Viskosität vernichtet werden. Das heißt, daß die *Impulsgleichung* nicht mehr in der Form „Kraft → Geschwindigkeit“ sondern in der richtigen Fassung „Kraft → Beschleunigung“ in die neue Theorie eingehen muß, denn diese Gleichung sorgt dafür, daß die abströmende Materie weit über die instabile Schicht hinausschießen und dort auch Netto-Energie nach oben oder unten transportieren kann.

Entscheidend wichtig ist es auch, die *Kontinuitätsgleichung* angemessen zu berücksichtigen. Denn nur so ist es möglich, die vertikalen und die *horizontalen* Strömungsbewegungen fernab der eigentlichen Konvektionszone zu miteinzubeziehen. Sie bestimmen entscheidend die effektive Masse der von der Konvektion durchmischten Materie. Die lokale Mischungswegtheorie unterschätzt diese Masse bei den untersuchten Hauptreihen-A-Sternen um etwa einen *Faktor 10* und bei den betrachteten Weißen Zwergen vom Typ DA um rund einen *Faktor 100.*

Eine weitere wichtige Ingredienz ist die von der Mischungswegtheorie ignorierte *Asymmetrie* zwischen Auf- und Abströmregionen, die für den nicht zu vernachlässigenden abwärtsgerichteten *kinetischen Energiefluß* verantwortlich ist. Außerdem können in den schmalen Abströmkanälen Temperaturen auftreten, die keineswegs mehr als kleine Fluktuationen um einen horizontalen Mittelwert beschrieben werden können.

Von der neuen Konvektionstheorie sollte es weiterhin eine *dynamische Version* geben, die in der Lage ist, auch gewisse zeitabhängige Prozesse zu beschreiben, um auf diese Weise u.a. die Wechselwirkung mit stellaren Pulsationen miteinzubeziehen.

Ich hoffe, daß das Bild der Struktur und Dynamik einer Konvektionszone, das sich aus den hier vorgestellten Simulationsmodellen ergibt, dazu beitragen kann, solch eine Konvektionstheorie zu konstruieren und gegebenenfalls freie Parameter zu kalibrieren. Trotz der komplexen konvektiven Strömungsformen, die sich in den Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen zeigen, halte ich solch eine Theorie wegen der doch in vielen Punkten guten Übereinstimmung der Resultate der einfachen lokalen Mischungswegtheorie mit den Ergebnissen dieser Simulationen für möglich.

Bis dahin wird man weiter mit der lokalen Mischungswegtheorie mit gegebenenfalls von Fall zu Fall angepaßtem Mischungswegparameter leben müssen und können.

11.2 Ausblick

Um die Strahlungs-Hydrodynamik-Simulationen mit Beobachtungsergebnissen zu konfrontieren, sollen aus den bereits gerechneten Modellen synthetische Spektren erzeugt werden, die dann direkt mit gemessenen verglichen werden können. Außerdem würde das eine weitere wichtige Vergleichsmöglichkeit mit der Mischungswegtheorie liefern.

Schon bisher wurden einige Sternmodelle mit Hilfe von Video-Animationen visualisiert. Dieses Projekt soll fortgeführt werden, um die räumlich-zeitliche Dynamik der konvektiven Strömungen und ihre Abhängigkeit von Effektivtemperatur, Schwerebeschleunigung und Sterntyp noch besser darzustellen. Insbesondere lassen sich so die komplexen Wechselwirkungsmechanismen von Konvektion und Pulsationen untersuchen.

Die Simulationsrechnungen sollen zu den kühleren DA Weißen Zwergen hin fortgesetzt werden. Da die Konvektionszone sich bis in immer größere Tiefen erstreckt, kann sie nicht mehr vollständig im Simulationsvolumen enthalten sein, und es muß auf die untere offene Randbedingung zurückgegriffen werden. Sie soll bei einer Effektivtemperatur (z.B. bei $T_{\rm eff} = 11400\,{\rm K}$) getestet werden, bei der es noch möglich ist, die gesamte Konvektionszone in einem sehr tiefen Modell einzuschließen, bei der andererseits die Konvektion so effektiv ist, daß die Formulierung der unteren Randbedingung greift.

Interessante Projekte sind weiterhin die Anwendung der Simulationsrechnungen auf Weiße Zwerge vom Typ DB, sowie die Hauptreihensterne im Übergangsbereich von den A- zu den F-Sternen, für die die bisherigen Rechnungen noch nicht voll befriedigend sind.

Mittelfristig muß jedoch das vorhandene Programm durch einen stabileren konservativen dreidimensionalen Code abgelöst werden, der wegen der höheren Anforderungen an Rechenleistung dann auf einem Parallelrechner eingesetzt werden muß. Mit ihm ließe sich dann auch testen, welche Auswirkungen eine Steigerung an Auflösung, also eine Verringerung der numerischen Viskosität, auf die Ergebnisse haben würde. Möglicherweise muß mit mehreren Gittern mit verschiedener Auflösung gearbeitet werden, um die verschiedenen Zeit- und Größenskalen z.B. in den beiden Konvektionszonen von A-Sternen zu berücksichtigen.

Ließen sich mit einem solchen Programm längere Sternzeiten überstreichen, könnte man die Wechselwirkung von Konvektion und Pulsationen besser untersuchen und es ließen sich Aussagen über die rote Kante des Cepheiden- und des ZZ Ceti-Instabilitätsstreifens gewinnen.

Um die Realitätsnähe der Simulationen weiter zu steigern, müssen schließlich weitere physikalische Effekte etwa durch Magnetfelder oder durch Rotation berücksichtigt werden.

11.3 Resümee

Ich hoffe, ich habe zeigen können, daß sich der beträchtliche Aufwand zur Betreibung dieser numerischen Simulationen lohnt, weil sie die einzigartige Möglichkeit bieten, einen Einblick in komplexe ansonsten unzugängliche Systeme zu geben.

Vielleicht führen diese Rechnungen zu einem gegenüber der lokalen Mischungswegtheorie modifizierten Bild der Konvektion und letztlich zu einer neuen nichtlokalen Theorie, die die Struktur und Dynamik besser wiedergibt, sich auch in Entwicklungsrechnungen integrieren läßt und sich zum Studium der Wechselwirkungsprozesse von Konvektion und Pulsationen eignet.

12 Literatur

B. N. Andersen 1994, Excitation of Solar Gravity waves, Solar Physics **152**, 241-246

H. M. Antia, S. M. Chitre 1993, Penetration at the Base of Solar Convection Zone, ApJ **413**, 778-785

Ludwig Biermann 1933, Untersuchungen über den inneren Aufbau der Sterne. IV. Konvektionszonen im Inneren der Sterne, Zeitschrift für Astrophysik **5**, 117-139

Ludwig Biermann 1942, Über das Ionisationsgleichgewicht und den Aufbau der Wasserstoffkonvektionszone, Zeitschrift für Astrophysik **21**, 320-346

Ludwig Biermann 1977, Historical Reminiscences of the Origins of Stellar Convection Theory, Problems of Stellar Convection, eds. Edward A. Spiegel and Jean-Paul Zahn, IAU Colloquium No. 38, Nice 1976, Lecture Notes in Physics **71**, 4-14

Karl-Heinz Böhm 1963, Unstable Modes in the Solar Hydrogen Convection Zone, ApJ **137**, 881-900

Karl-Heinz Böhm 1963, The Mixing of Matter in the Layer below the Outer Solar Convection Zone, ApJ **138**, 297-301

Karl-Heinz Böhm, Egon Richter 1959, Der Einfluß des Strahlungsaustausches auf die Konvektion in einer polytropen Atmosphäre, Zeitschrift für Astrophysik **48**, 231-248

Karl-Heinz Böhm, Egon Richter 1960, Konvektion in einer Atmosphäre mit tiefenabhängigem Temperaturgradienten mit starker Dichtevariation, Zeitschrift für Astrophysik **50**, 79-95

Erika Böhm-Vitense 1958, Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte, Zeitschrift für Astrophysik **46**, 108-143

Erika Böhm-Vitense 1970, The UBVr Colors of Main Sequence Stars, A&A **8**, 283-298

Erika Böhm-Vitense 1970, Convection in A and F Stars and Metallicism, A&A **8**, 299-306

Erika Böhm-Vitense 1989, Introduction to Stellar Astrophysics 2, Stellar Atmospheres, Cambridge University Press

Erika Böhm-Vitense 1992, Introduction to Stellar Astrophysics 3, Stellar Structure and Evolution, Cambridge University Press

Erika Böhm-Vitense, R. Canterna 1974, The Gap in the Two-Color Diagram of Main-Sequence Stars, ApJ **194**, 629-635

Erika Böhm-Vitense, George Driver Nelson 1976, About the Proper Choice of the Characteristic Length in the Convection Theory, ApJ **210**, 741-749

R. J. Bray, R. E. Loughhead, C. J. Durrant 1984, The Solar Granulation, Cambridge University Press, 2nd edition

M. Bünte, T. J. Bogdan 1994, Magneto-Atmospheric Waves subject to Newtonian Cooling, A&A **283**, 642-649

V. M. Canuto, Italo Mazzitelli 1991, Stellar Turbulent Convection: A New Model and Applications, ApJ **370**, 295-311

V. M. Canuto, Italo Mazzitelli 1992, Further Improvements of a New Model for Turbulent Convection in Stars, ApJ **389**, 724-730

Kwing L. Chan, Detlef Gigas 1992, Downflows and Entropy Reversal in Deep Convection, ApJ **389**, L87-L90

Kwing L. Chan, Sabatino Sofia, Charles L. Wolff 1982, Turbulent Compressible Convection in a Deep Atmosphere. I. Preliminary Two-Dimensional Results, ApJ **263**, 935-943

Kwing L. Chan, Sabatino Sofia 1986, Turbulent Compressible Convection in a Deep Atmosphere. III. Tests on the Validity and Limitations of the Numerical Approach, ApJ **307**, 222-241

Kwing L. Chan, Sabatino Sofia 1987, Validity Tests of the Mixing-Length Theory of Deep Convection, Science **235**, 465-467

Kwing L. Chan, Sabatino Sofia 1989, Turbulent Compressible Convection in a deep Atmosphere. IV. Results of Three-Dimensional Computations, ApJ **336**, 1022-1040

Paul Charbonneau 1991, Chemical Separation vs rotation in A and F-Stars, in: "Peculiar vs normal Phenomena in A-type and related Stars", eds. M. M. Dworetski, F. Castelli, R. Faraggiana, IAU **138**

Paul Charbonneau 1993, Particle Transport and the λ Bootis Phenomenon. I. The Diffusion/Mass-Loss Model Revisited, ApJ **405**, 720-726

Paul Charbonneau, Georges Michaud 1991, Meridional Circulation and Diffusion in A and Early F Stars, ApJ **370**, 693-708

J. Christensen-Dalsgaard, Douglas O. Gough, M. J. Thompson 1991, The Depth of the Solar Convection Zone, ApJ **378**, 413-437

M. F. Coupry, C. Burkhart 1992, The A and Am-Fm stars. II. Equivalent widths for the Li region, microturbulence, and comments on curious looking line profiles, A&AS **95**, 41-49

T. G. Cowling 1941, The Non-Radial Oscillations of Polytropic Stars, Monthly Notices Roy.Astron.Soc. **101**, 367-375

Arthur N. Cox, David S. King, Stephen W. Hodson 1979, Theoretical Pulsation of Metallic-Line Stars, ApJ **231**, 798-807

John P. Cox 1980, Theory of Stellar Pulsation, Princeton University Press

John P. Cox, R. Thomas Giuli 1968, Principles of Stellar Structure, Volume 1 and 2, Gordon and Breach, Science Publishers

Francesca D'Antona, Italo Mazzitelli 1994, New Pre-Main-Sequence Tracks for $M \leq 2.5 M_\odot$ as Tests of Opacities and Convection Model, ApJS **90**, 467-500

J. W. Deardorff 1970, J. Fluid Mech. **41**, 453

J. W. Deardorff 1971, J. Comp. Phys. **7**, 120

Claus Rüdiger de Boer, Franz Kneer, A. Nesis 1992, Speckle Observations of Solar Granulation A&A **257**, L4-L6

Claus Rüdiger de Boer 1993, Speckle-Interferometrie und ihre Anwendung auf die Sonnenbeobachtung, Dissertation, Göttingen, Verlag Shaker

Robert G. Deupree 1974, Nonlinear, Adiabatic, Nonradial Stellar Pulsation: Calculations and Applications, ApJ **194**, 393-401

Robert G. Deupree 1975, On the Treatment of Convection as a Nonradial Stellar Pulsation, ApJ **198**, 419-423

Robert G. Deupree 1975, On Shallow Convective Envelopes , ApJ **201**, 183-189

Robert G. Deupree 1976, Nonlinear Convective Motion in Shallow Convective Envelopes, ApJ **205**, 286-294

Robert G. Deupree 1976, A Suggestion for the Alternating Amplitudes of RV Tauri Variables, ApJ **208**, 426-427

Robert G. Deupree 1977, The Theoretical Red Edge of the RR Lyrae Gap. I. Dependence of Convection on Pulsation Phase , ApJ **211**, 509-526

Robert G. Deupree 1977, The Theoretical Red Edge of the RR Lyrae Gap. II. Dependence of the Red Edge on Luminosity and Composition, and Observational Consequences , ApJ **214**, 502-509

Robert G. Deupree 1977, The Theoretical Red Edge of the RR Lyrae Gap. III. Overtone Pulsation, ApJ **215**, 232-235

Robert G. Deupree 1977, The Theoretical Red Edge of the RR Lyrae Gap. IV. Convective Steady-State Models , ApJ **215**, 620-623

Robert G. Deupree 1979, Another Fundamental, but Correctable, Inconsistency of the Local Mixing-Length Theory , ApJ **234**, 228-231

Robert G. Deupree 1980, The Cepheid Instability Strip, ApJ **236**, 225-229

Robert G. Deupree 1984, Two- and Three-Dimensional Numerical Simulations of the Core Helium Flash, ApJ **282**, 274-286

Robert G. Deupree 1985, Convection, the Blue Edge of the RR Lyrae Gap, and a Comparison of One-dimensional and Two-dimensional Hydrodynamics Simulation, ApJ **296**, 160-164

Robert G. Deupree, Terry M. Varner 1980, The Value of the Mixing-Length, ApJ **237**, 558-562

Dainis Dravins 1987, Stellar Granulation I. The Observability of Stellar Photospheric Convection, A&A **172**, 200-210

Dainis Dravins 1987, Stellar Granulation II. Stellar Photospheric Line Asymmetries, A&A **172**, 211-224

DAINIS DRAVINS, B. LARSSON, ÅKE NORDLUND 1986, Solar Fe II Line Asymmetries and Wavelength Shifts, A&A **158**, 83-88

N. S. DZHALILOV, Y. D. ZHUGZHDA, J. STAUDE 1992, Radiation - Hydrodynamic Waves in an Optically Grey Atmosphere. I. Homogeneous Model, A&A **257**, 359-365

N. S. DZHALILOV, Y. D. ZHUGZHDA, J. STAUDE 1994, Radiation - Hydrodynamic Waves in an Optically Grey Atmosphere. II. Analysis of Wave Properties and Effects of Thermal Conductivity in a Homogeneous Model, A&A **291**, 1001-1010

ARTHUR S. EDDINGTON 1926, The Internal Constitution of the Stars, Cambridge University Press

GILLES FONTAINE, P. BRASSARD, F. WESEMAEL, M. TASSOUL 1994, On the Hydrogen Layer Thicknes in Pulsating DA White Dwarfs, ApJL **428**, L61-L64

BERND FREYTAG 1991, Spektroskopie Solarer Granulationszellen und Vergleich mit Numerischen Simulationen, Diplomarbeit, Kiel

BERND FREYTAG, MATTHIAS STEFFEN, HANS-GÜNTER LUDWIG 1995, Numerical Simulations of Convection and Overshoot in the Envelope of DA White Dwarfs, Proceedings of the 9th European Workshop on White Dwarfs, Kiel, August 29 - September 1, eds. Detlev Koester, Klaus Werner, Lecture Notes in Physics , 88-92

K. FUHRMANN, M. AXER, T. GEHREN 1993, Balmer Lines in Cool Dwarf Stars. I. Basic Influence of Atmospheric Models, A&A **271**, 451-462

M. GABRIEL 1994, Influence of Physical Effects on the Solar p-Mode Spectrum, A&A **292**, 281-290

ALFRED GAUTSCHY, HANS-GÜNTER LUDWIG 1995, Grasping at the Hot End of ZZ Ceti Variability, Proceedings of the 9th European Workshop on White Dwarfs, Kiel, August 29 - September 1, eds. Detlev Koester, Klaus Werner, Lecture Notes in Physics

DETLEF GIGAS 1990, Die Atmosphäre von Wega. Metallizität, Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht und hydrodynamische Aktivität eines A0 V-Standardsterns, Dissertation, Kiel

JOYCE A. GUZIK, ARTHUR N. COX 1993, Using Solar p-Modes to Determine the Convection Zone Depth and Constrain Diffusion-Produced Composition Gradients, ApJ **411**, 394-401

HARTMUT HOLWEGER, MICHAEL LEMKE, INGA RENTZSCH-HOLM, SVEN STÜRENBURG 1994, Abundance Patterns in Unevolved A Stars and in Blue Stragglers, in: Nuclei in the Cosmos, eds. M. Busso, R. Gallino, C. M. Raiteri, Proceedings of the Third International Symposium on Nuclear Astrophysics, Gran Sasso, Italy, 1994

HARTMUT HOLWEGER, SVEN STÜRENBURG 1993, Carbon and Silicon in Normal A Stars and in Lambda Bootis Stars, Peculiar versus Normal Phenomena in A-type and Related Stars, ASP conference Series, Vol. 44, 1993, eds. M. M. Dworetsky, F. Castelli, R. Faraggiana , 472-476

Neal E. Hurlburt, Juri Toomre, Joseph M. Massaguer 1984, Two-Dimensional Compressible Convection extending over Multiple Scale Heights, ApJ **282**, 557-573

Neal E. Hurlburt, Juri Toomre, Joseph M. Massaguer 1986, Nonlinear Compressible Convection Penetrating into Stable Layers and Producing Internal Gravity Waves, ApJ **311**, 563-577

Neal E. Hurlburt, Juri Toomre, Joseph M. Massaguer, Jean-Paul Zahn 1994, Penetration Below a Convection Zone, ApJ **421**, 245-260

Cornelis de Jager 1948, Proc.Nederl.Akad.Wetensch. **51/6**

Rudolf Kippenhahn, Alfred Weigert 1991, Stellar Structure and Evolution, Springer-Verlag, A&A-Library

Detlef Koester, Volker Weidemann, T. E.-M. Zeidler-K.T., Gérard Vauclair 1985, The Explanation of the 1400 and 1600 Å Features in DA white dwarfs, A&AL **143**, L5-L8

Peter Kosmol 1989, Methoden zur Numerischen Behandlung Nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben, Teubner, Stuttgart

Carsten Krege 1995, Die chemische Zusammensetzung unentwickelter Sterne der Spektraltypen A und F. Anwendung aktueller Methoden der Sternanalyse auf hochaufgelöste Reticon-Spektren, Diplomarbeit Kiel

Andrea Krüss 1991, Die Brunt-Väisälä-Frequenz als Resonanzfrequenz in stellaren Atmosphären, Dissertation, Kiel

D. W. Kurtz 1989, Metallicism and Pulsation: The Discovery of δ Scuti Variability in a Classical Am star, HD 1097, Monthly Notices Roy.Astron.Soc. **238**, 1077-1084

D. W. Kurtz 1990, The Discovery and Analysis of Oscillations with a Period of 7.4 min in the Cool Ap Star HD 80316, Monthly Notices Roy.Astron.Soc. **242**, 489-494

Robert L. Kurucz 1979, Model Atmospheres for G, F, A, B, and O Stars, ApJS **40**, 1-340

Lev D. Landau, Evgenij M. Lifschitz 1991, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VI: Hydrodynamik, Akademie Verlag Berlin

Jean Latour, Edward A. Spiegel, Juri Toomre, Jean-Paul Zahn 1976, Stellar Convection Theory. I. The Anelastic Modal Equations, ApJ **207**, 233-243

Jean Latour, Juri Toomre, Jean-Paul Zahn 1981, Stellar Convection Theory. III. Dynamical Coupling of the two Convection Zones in A-type Stars by Penetrative Motions, ApJ **248**, 1081-1098

P. Ledoux, M. Schwarzschild, Edward A. Spiegel 1961, On the Spectrum of Turbulent Convection, ApJ **133**, 184-197

A. Legait 1986, Radiative Convection in a Stratified Atmosphere, A&A **168**, 173-183

John Leibacher, Robert F. Stein 1971, A New Description of the Solar Five-Minute Oscillation, Astroph. Letters **7**, 191-192

Robert B. Leighton, Robert W. Noyes, George W. Simon 1962, Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report, ApJ **135**, 474-499

Y. Li, M. Stix 1994, The δ Scuti Instability Strip: Effects of Opacity Enhancement and Wave Reflections, A&A **286**, 815-823

C. de Loore 1969, Convection Regions and Coronas of Sun and Stars, Astrophysics and Space Science **6**, 60-100

Hans-Günter Ludwig 1992, Nichtgrauer Strahlungstransport in numerischen Simulationen stellarer Konvektion, Dissertation, Kiel

Hans-Günter Ludwig, Stefan Jordan, Matthias Steffen 1993, First Numerical Simulations of Convection at the Surface of a ZZ Ceti White Dwarf, in: White Dwarfs: Advances in Observation and Theory, ed. M. A. Bastow, NATO ASI Series C, Kluwer Academic Publishers , 471-478

Hans-Günter Ludwig, Stefan Jordan, Matthias Steffen 1994, Numerical Simulations of Convection at the Surface of a ZZ Ceti White Dwarf, A&A **284**, 105-117

Hans-Günter Ludwig, Matthias Steffen 1991, Wega: Konvektive Instabilität, Private Mitteilung

Hans-Günter Ludwig, Matthias Steffen, Detlef Gigas, Andrea Krüss 1989, Numerische Simulation solarer Granulationszellen mit unterschiedlicher horizontaler Ausdehnung, Publikation der Sternwarte Kiel Nr. **501**

A. Maeder 1977, The Boundaries of a Convective Zone, Problems of Stellar Convection, eds. Edward A. Spiegel and Jean-Paul Zahn, IAU Colloquium No. 38, Nice 1976, Lecture Notes in Physics **71**, 235-236

Joseph M. Massaguer, Jean-Paul Zahn 1980, Cellular Convection in a Stratified Atmosphere, A&A **87**, 315-327

Georges Michaud, David Tarasick, Yves Charland, Claude Pelletier 1983, Diffusion, Meridional Circulation, and Mass Loss in Fm-Am Stars ApJ **269**, 239-249

Dimitri Mihalas 1970, Stellar Atmospheres, W. H. Freeman and Company, San Francisco

Dimitri Mihalas, Barbara Weibel Mihalas 1984, Foundations of Radiation Hydrodynamics, Oxford University Press, New York, Oxford

M.J.P.F.G. Monteiro, J. Christensen-Dalsgaard, M. J. Thompson 1994, Seismic Study of Overshoot at the Base of the Solar Convective Envelope, A&A **283**, 247-262

Ewald Müller 1993, Two- and Three-Dimensional Simulations of Convection in Protoneutron Stars, Proceedings of the 7th Workshop on Nuclear Astrophysics, Ringberg Castle, Tegernsee, Germany, March 22 - March 27; eds. Wolfgang Hillebrandt and Ewald Müller, Max-Planck-Institut für Astrophysik , 27-35

Herbert J. Muthsam, Wolfgang Göb, Friedrich Kupka, Wolfgang Liebich, Johann Zöchling 1995, A Numerical Study of Compressible Convection, A&A **293**, 127-141

D. Narasimha, H. M. Antia 1982, Consistency of the Mixing Length Theory, ApJ **262**, 358-368

Edmund P. Nelan, Gary Wegner 1985, Identification of the 1400 and 1600 Å Features observed in the Ultraviolet Spectra of DA White Dwarfs, ApJL **289**, L31-L33

George Driver Nelson 1980, Granulation in a Main-Sequence F-Type Star, ApJ **238**, 659-666

George Driver Nelson, Steven Musman 1977, A Dynamical Model of Solar Granulation, ApJ **214**, 912-916

John von Neumann, R. D. Richtmyer 1950, J. Appl. Phys. **21**, 232

Åke Nordlund 1982, Numerical Simulations of the Solar Granulation, A&A **107**, 1-10

Åke Nordlund 1984, Modelling of Small-Scale Dynamical Processes: Convection and Wave Generation, Small-Scale Dynamical Processes in Quiet Stellar Atmospheres, NSOC, ed. Stephen L. Keil 181-221

Åke Nordlund 1985, Solar Convection, Solar Physics **100**, 209-235

Åke Nordlund, Dainis Dravins 1990, Stellar Granulation. III. Hydrodynamic Model Atmospheres, A&A **228**, 155-183

M. L. Norman, K.-H. A. Winkler 1986, in Astrophysical Radiation Hydrodynamics, eds. K.-H. A. Winkler, M. L. Norman, Reidel Publishing Company , 187-221

C. Paquette, C. Pelletier, Gilles Fontaine, Georges Michaud 1986, Diffusion in White Dwarfs: New Results and Comparative Study, ApJS **61**, 197-217

David H. Porter, Paul R. Woodward 1994, High-Resolution Simulations of Compressible Convection Using the Piecewise-Parabolic-Method, ApJS **93**, 309-349

Ludwig Prandtl 1965, Führer durch die Strömungslehre, Vieweg, Braunschweig

Mark P. Rast, Åke Nordlund, Robert F. Stein, Juri Toomre 1993, Ionization Effects in Three-Dimensional Solar Granulation Simulations, ApJL **408**, L53-L56

Mark P. Rast, Juri Toomre 1993, Compressible Convection with Ionization. I. Stability, Flow Asymmetries, and Energy Transport, ApJ **419**, 224-239

Mark P. Rast, Juri Toomre 1993, Compressible Convection with Ionization. II. Thermal Boundary-Layer Instability, ApJ **419**, 240-254

A. Renzini, C. Cacciari, P. Ulmschneider, F. Schmitz 1977, Theoretical Chromospheres of Late Type Stars, A&A **61**, 39-45

A. Renzini 1987, Some Embarrassments in Current Treatments of Convective Overshooting, A&A **188**, 49-54

Heinz Georg Schuster 1984, Deterministic Chaos. An Introduction, Physik-Verlag, Weinheim

Karl Schwarzschild 1906, Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, Göttinger Nachrichten , 41

Giora Shaviv, Edwin E. Salpeter 1973, Convective Overshooting in Stellar Interior Models, ApJ **184**, 191-200

Theodore Simon, Wayne Landsman 1991, The Onset of Chromospheric Activity among the A and F Stars, ApJ **380**, 200-207

Theodore Simon, Stephen A. Drake 1993, The Coronae of Main-Sequence A Stars, Astronomical J. **106**, 1660-1663

D. Skaley, Michael Stix 1991, The Overshoot Layer at the Base of the Solar Convection Zone, A&A **241**, 227

J. S. Smagorinsky 1963, Monthly Weather Rev. **91**, 99

Sabatino Sofia, Kwing L. Chan 1984, Turbulent Compressible Convection in a Deep Atmosphere. II. Two-Dimensional Results for Main-Sequence A5 and F0 Type Envelopes, ApJ **282**, 550-556

P. Souffrin 1972, Radiative Relaxation of Sound Waves in an Optically Thin Isothermal Atmosphere, A&A **17**, 458-467

Edward A. Spiegel 1957, The Smoothing of Temperature Fluctuations by Radiative Transfer, ApJ **126**, 202-207

R. P. Stefanik, P. Ulmschneider, R. Hammer, Chris J. Durrant 1984, Nonlinear Two-Dimensional Dynamics of Stellar Atmospheres. I. A Computational Code, A&A **134**, 77-86

Matthias Steffen 1990, A Simple Method for Monotonic Interpolation in One Dimension, A&A **239**, 443-450

Matthias Steffen 1991, 2-D Radiation-Hydrodynamics Models of the Solar Photosphere, in: "Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models", NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, eds. L. Crivellari, I. Hubeny, D. G. Hummer , 247-261

Matthias Steffen 1992, The Depth of the Solar Convection Zone Inferred from Hydrodynamical Models of the Surface Layers, IAU Colloquium No 137, Inside the Stars, 13-17 April 1992

Matthias Steffen 1992, Acoustic Flux Generation in Stellar Convection Zones: Results from Numerical Radiation Hydrodynamics Models, Stellar Chromospheres, Coronae and Winds, eds. C. S. Jeffery, R. E. M. Griffin, Publ. Institute of Astronomy , 7

Matthias Steffen 1994, Acoustic Flux Generation in the Solar Convection Zones, Solar Magnetic Fields, eds. Manfred Schüssler, Wolfgang Schmidt, Cambridge University Press , 294-297

Matthias Steffen, Detlef Gigas, Hartmut Holweger, Andrea Krüss, Hans-Günter Ludwig 1990, Results from 2-D Numerical Simulations of Solar Granules, in: "Solar Photosphere: Structure, Convection, and Magnetic Fields", ed. J. O. Stenflo, IAU **138**, 213-216

Matthias Steffen, Bernd Freytag 1991, Hydrodynamics of the Solar Photosphere: Model Calculations and Spectroscopic Observations, "Reviews in Modern Astronomy, Vol. 4", ed. G. Klare, Springer Verlag **4**

Matthias Steffen, Bernd Freytag 1995, Lyapunov Exponents for Solar Surface Convection, Chaos, Solitons & Fractals, Pergamon Press **(in press)**

Matthias Steffen, Bernd Freytag, Hartmut Holweger 1994, Shocks in the Solar Photosphere and their Spectroscopic Signature, Solar Magnetic Fields, eds. Manfred Schüssler, Wolfgang Schmidt, Cambridge University Press , 298-300

Matthias Steffen, Hans-Günter Ludwig, Bernd Freytag 1994, Synthetic Spectra Computed from Hydrodynamical Model Atmospheres of DA White Dwarfs, A&A **(submitted)**

Matthias Steffen, Hans-Günter Ludwig, Andrea Krüss 1989, A Numerical Simulation Study of Solar Granular Convection in Cells of Different Horizontal Dimension, A&A **213**, 371-382

Matthias Steffen, D. Muchmore 1988, Can Granular Fluctuations in the Solar Photosphere Produce Temperature Inhomogeneities at the Height of the Temperature Minimum? A&A **193**, 281-290

Robert F. Stein, Åke Nordlund, Jeff R. Kuhn 1989, Convection and Waves, Solar and Stellar Granulation, eds. Robert J. Rutten and G. Severino, Kluwer Academic Press , 381-399

R. F. Stellingwerf 1979, Pulsation in the Lower Cepheid Strip. I. Linear Survey, ApJ **227**, 935-942

Michael Stix 1989, The Sun, Springer-Verlag, A&A Library

Josef Stoer, Roland Bulirsch 178, Einführung in die Numerische Mathematik II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Sven Stürenburg 1993, Abundance Analysis of λ Bootis Stars, A&A **277**, 139-154

Yoichi Takeda 1992, Strength of the O I Triplet λ7771-5 and Atmospheric Microturbulence in A-F Stars, Publ. A. S. Japan **44**, 309-324

M. Tassoul, Gilles Fontaine, D. E. Winget 1990, Evolutionary Models for Pulsation Studies of White Dwarfs, ApJS **72**, 335-386

Juri Toomre, Neal E. Hurlburt, Joseph M. Massaguer 1984, Strong Downward Plumes Resulting from Compressibility in Nonlinear Convection and their Coupling to Gravity Waves, Small-Scale Dynamical Processes in Quiet Stellar Atmospheres, NSOC, ed. Stephen L. Keil 222-234

Juri Toomre, Jean-Paul Zahn, Jean Latour, Edward A. Spiegel 1976, Stellar Convection Theory. II. Single-Mode Study of the Second Convection Zone in an A-Type Star, ApJ **207**, 545-563

S. Turcotte, Paul Charbonneau 1993, Particle Transport and the λ Bootis Phenomenon. II. An Accretion/Diffusion Model, ApJ **413**, 376-389

Roger K. Ulrich 1970, The Five-Minute Oscillations on the Solar Surface, ApJ **162**, 993-1002

Wasaburo Unno, Edward A. Spiegel 1966, The Eddington Approximation in the Radiative Heat Equation, Publ. A. S. Japan **18**, 85-95

Albrecht Unsöld 1930, Konvektion in der Sonnenatmosphäre, Zeitschrift für Astrophysik **1**, 138-148

Albrecht Unsöld 1968, Physik der Sternatmosphären, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

Albrecht Unsöld, Bodo Baschek 1988, Der Neue Kosmos, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo

Erika Vitense 1953, Die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne, Zeitschrift für Astrophysik **32**, 135-164

Carl Friedrich von Weizsäcker 1948, Das Spektrum der Turbulenz bei Großen Reynoldschen Zahlen, Zeitschrift für Physik **124**, 614-627

D. E. Winget 1993, The Physics of White Dwarf Pulsations, in: "White Dwarfs: Advances in Observation and Theory", NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, ed. Martin A. Barstow , 449-458

Da Run Xiong 1991, Stellar Convection, Proc. ASA **9**, 26-31

Y. D. Zhugzhda 1991, On the Problem of f-Mode Generation in the Solar Atmosphere, Solar Physics **132**, 205-213

Index

A-Stern, 39, 97–106, 142
Absorptions-Features, 26, 112
Abströmkanal, 2, 115, 119, 165, 170
$abuX$, 12, 20, 49
$abuY$, 12, 20, 49
$abuZ$, 12, 49
Adiabatenkoeffizient
  1., 13, 73, 74
  2., 13, 23
  3., 13, 23
  effektiver 1., 13
adiabatisch, 55, 58, 60, 63, 72, 89
adiabatischer Temperaturgradient, 14, 23, 54, 57, 78, 87
Advektion, 16
  horizontale, 6, 88, 89
Ähnlichkeitsparameter, 49
akustische Cutoff-Frequenz, 16, 24, 68, 70
α, 12, 82
α_T, 12, 20
Anfangsmodell, 39
Asymmetrie, 2, 115, 117, 122, 126, 135, 171
ATLAS6, 82, 134, 139
Atommassenkonstante, 15
Auftriebskraft, 13, 53, 56, 57, 76, 79, 127, 149

Bénard-Instabilität, 49, 54
Bicharakteristiken-Methode, 26
B_ν, 12
Bo, 12, 46, 54
Bohr-Radius, 12
Boltzmann-Konstante, 14
Boltzmann-Zahl, 12, 46, 54
Brunt-Väisälä-Frequenz, 16, 24, 56, 68, 69, 87
  einer isothermen Atmosphäre, 66
Brunt-Väisälä-Zeitskala, 15, 47, 50, 51, 72, 99

C, 12
c, 12
Cepheiden-Instabilitätsstreifen, 5, 6, 71, 72, 97, 98, 165, 172
Chaos, 4, 110, 120, 155
Chemie, 10, 49, 84, 97
χ_{rad}, 52
Courant-Zeit, 15, 27, 46
c_p, 12, 21, 40, 41
c_p', 12
c_s, 12, 40, 41
c_T, 40, 41
c_v, 12, 40, 41
c_v', 12, 22

$\underline{D}$, 12
$\widehat{\nabla \vec{v}}$, 15, 62
d_{el}, 12
δ, 12
diagnostisches Diagramm, 67
Dichteinversion, 39, 43
Dichteskalenhöhe, 13, 24, 74, 82
Diffusionsgleichung, 151, 157
Diffusionsnäherung, 48, 80
Diffusivität, 15
  radiative, 16, 52
Dispersionsrelation, 66–69, 148
Dissipation, 55
Dissipationsbereich, 17
Dissipationsfunktion, 18
Druck, 14, 67
Druckskalenhöhe, 13, 24, 37, 44, 54, 82

Eddington-Näherung, 37, 38, 48
Effektivtemperatur, 11, 15, 28, 49, 138
e_{int}, 13
e_{kin}, 13
Energiebereich, 17
Energiefluß, 25
Energiegleichung, 17, 60
Enthalpie, 24
Enthalpiefluß, 25, 84, 88, 89, 126, 127, 132, 133, 138
Entropie, 14, 17, 52, 57, 84, 86, 89
Entropieänderung, 19
Entropie-Umkehr, 127, 132
Entropieableitung, 57, 84
entropy reversal, 127
e_{pot}, 13
e_{tot}, 13
evaneszent, 69–71, 147

f-Mode, 69, 119, 162
f_{buo}, 13, 79

Fr, 13, 53
Freifallzeit, 15, 47
Frequenz
  Brunt-Väisälä-, 16, 24
  Cutoff-, 16, 24
Froude-Zahl, 13, 53
Fundamental-Mode, 69, 168

g, 13, 49
γ, 13, 40, 41
Γ_1, 13, 40, 41, 73, 74
$\Gamma_{1,\mathrm{eff}}$, 13, 73
Γ_2, 13
Γ_3, 13
GAS-Routine, 20
gesamte Energie, 13, 16, 25
Geschwindigkeit, 15
Gitter, 9, 39, 42, 84, 101, 107, 108, 134
g^--Mode, 69, 71, 147–149, 162
g^+-Mode, 68, 71, 162
Gr, 13, 53, 55, 56
Graßhof-Zahl, 13, 53, 55, 56
Granulation, 1, 2, 4, 6, 85, 148
Granule, 2, 85, 88, 139, 146
  explodierende, 85
  hellste Stelle einer, 86
  Teilung einer, 85
graue Atmosphäre, 37, 39
Grenzfrequenz, 24, 68
Grenztemperatur, 37
Grundannahmen, 9
Grundgleichungen, 60

Hauptsatz der Thermodynamik, 22
Helioseismologie, 72, 86
Heliumkonvektionszone, 6, 39, 97, 99, 158
Helmholtz-Kelvin-Instabilität, 89
Hopf-Funktion, 14, 37
horizontale Wellenzahl, 70
Horizontalgeschwindigkeit, 107
H_p, 13, 54, 82
H_ρ, 13, 74
H_T, 13
H_τ, 13
hydrostatisch, 60

Impulsbilanzgleichungen, 16, 60, 170
innere Energie, 13, 24
Instabilitätskriterium, 57, 59
Instabilitätsstreifen, 5, 6, 71, 72, 97, 98, 165, 169, 172
intergranulares Gebiet, 85
Ionisation, 20, 65, 89, 97
Ionisationsgrad
  Helium, 15
  Wasserstoff, 15
isotherme Atmosphäre, 65, 66, 75
isotherme Schallgeschwindigkeit, 24

Jet, 85, 115, 117, 119

K, 14
k, 13, 63, 64, 70
Kalzium, 158, 160
κ, 14, 40, 41
κ-Mechanismus, 68, 71, 165
kartesische Geometrie, 62
k_B, 14
Kelvin-Zeitskala, 15, 47, 50, 51
kinematische Viskosität, 14
kinetische Energie, 13, 24
kinetischer Energiefluß, 25, 89, 138, 171
Kn, 54
Knudsen-Zahl, 54
Kontinuitätsgleichung, 16, 60, 171
Konvektion, 1, 4, 9, 69, 77, 97, 170
konvektive Instabilität, 6, 55, 57, 59, 88
konvektiver Fluß, 79
Konzentration, 12, 150, 151, 157, 158
K_rad, 14, 52
k_z, 70

ℓ, 14, 82
Längenskalen, 42
LAWE, 60–75
Leitfähigkeit, 14
  radiative, 14, 52
lokaler Temperaturgradient, 78
LTE, 10

Ma, 14, 52
Mach-Zahl, 2, 14, 52, 104, 167
Magnetfelder, 10, 17, 59
Makroturbulenz, 129
Massendichte, 14
Mikroturbulenz, 129
Mischungsweg, 14, 76, 77, 81, 82
Mischungswegmodelle, 82
Mischungswegparameter, 1, 5, 12, 82, 86, 97, 133, 139

Mischungswegtheorie, 2, 10, 11, 54, 57, 72, 76–83, 89, 107, 109, 126, 131, 133, 169
mittlere freie Weglänge, 42
mittlere Stoßzeit, 15, 49–51
mittleres Molekulargewicht, 20
MLT, 76, 138
mode trapping, 71
Molekulargewicht, 14, 20
μ, 14, 20, 40, 41

∇, 14, 78, 81
$\vec{\nabla}$, 14, 60
$\nabla_{\rm ad}$, 14, 78, 81
$\nabla_{\rm el}$, 14, 78, 81
$\nabla_{\rm rad}$, 14, 78, 81
Newtonsche Kühlung, 58, 73
Nichtlinearität, 4, 5, 52, 149, 150, 159
Nichtlokalität, 26, 37, 61, 72, 77, 170
$\eta_{\rm turb}$, 13
Nu, 14, 53
ν, 14
$\nu_{\rm rad}$, 52
Nusselt-Zahl, 14, 53
$\eta_{\rm x,shock}$, 13
$\eta_{\rm z,shock}$, 13

$\omega_{\rm ac}$, 16, 24, 68
$\omega_{\rm BV}$, 16, 24, 50, 51, 68
Opazität, 14, 28, 85, 87
Opazitäten, 11, 25, 81, 112
  graue, 10, 113, 114
  nichtgraue, 10, 11, 113, 114
optische Tiefe, 15, 37, 84
Overshoot, 2, 7, 72, 77, 82, 83, 107, 145, 158, 159

P, 14, 40, 41
$\hat{P}$, 14, 64
p-Mode, 67, 86, 109, 162, 165
P_1, 14
Péclet-Zahl, 14, 53, 55, 56
Pe, 14, 53, 55, 56
planparallel, 65
potentielle Energie, 13, 25
Pr, 14, 52, 55, 56, 59
Prandtl-Zahl, 14, 52, 55, 56, 59
  radiative, 52
  turbulente, 111, 113
propagierend, 69
$\mathrm{Pr}_{\rm rad}$, 52
$\mathrm{Pr}_{\rm th}$, 52
$\mathrm{Pr}_{\rm turb}$, 52, 111, 113

$q_{\rm grey}$, 14

Ra, 14, 53, 55, 56, 59
radiative Diffusivität, 16, 52
radiative Leitfähigkeit, 14, 52
radiative Prandtl-Zahl, 52
radiative viskose Zeitskala, 50, 51
radiative Viskosität, 52
radiativer Temperaturgradient, 14, 78, 87
Randbedingung, 9, 29, 63–65, 74, 84
random walk, 155
Rayleigh-Zahl, 5, 14, 28, 53, 55, 56, 59, 99
Re, 14, 53, 55, 56
relative Sternmasse, 39, 42
Reynolds-Zahl, 5, 14, 17, 43, 49, 53, 55, 56
RHD, 138
ρ, 14, 40, 41
$\hat{\rho}$, 14, 64
ρ_1, 14
Ri, 14, 53
Richardson-Zahl, 14, 53
rms-Wert, 25
Rotation, 10

s, 14, 40, 41
s_1, 14
Schall, 17, 45, 46, 67, 70, 165, 167
Schallaufzeit, 15, 46, 50, 51, 72
Schallerzeugung, 165
Schallgeschwindigkeit, 12, 44, 85
  adiabatische, 24
  isotherme, 24
Schallwellen, 24
Schießverfahren, 74
Schock, 17, 61, 85, 89, 124, 167
Schockdissipation, 19
Schockviskosität, 13, 17, 26
Schwarzschild-Kriterium, 57, 59, 76, 77
Schwerebeschleunigung, 9, 13, 49, 62
Schwerewellen, 24, 47, 68, 71–73
$S_{\rm el}$, 14
σ, 15
$\sigma_{\rm atom}$, 15
Skalenhöhe der optischen Tiefe, 13
spezifische innere Energie, 24

spezifische Wärme, 12, 21, 23
St, 15, 52
Stoßquerschnitt, 15
stochastische Anregung, 168
Strömung
  laminare, 49, 53
  turbulente, 49, 53
Strömungsänderungszeitskala, 15, 47
Strömungszeitskala, 15, 47
Strahlungsaustausch, 52, 61, 72
Strahlungsbeschleunigung, 19
Strahlungsdruck, 10
Strahlungsgleichgewicht, 60
Strahlungsrelaxationszeit, 15, 26, 47, 48, 50, 51, 72, 87
Strahlungstransport, 11, 19, 61, 72
Strahlungstransportgleichung, 19
Strouhal-Zahl, 15, 52

T, 15, 40, 41
$\hat{T}$, 15, 64
t, 15
t_{ac}, 15, 50, 51, 72
τ, 15, 37, 40, 41
t_{BV}, 15, 47, 50, 51, 72
t_{Courant}, 15, 46, 47
T_{eff}, 15, 49
Temperatur, 15
Temperaturgradient, 14, 57, 84, 134
Temperaturgradient eines konvektiven Elements, 14, 78, 81
Temperaturskalenhöhe, 13
t_{flow}, 15, 47
$t_{\mathrm{flow,change}}$, 15, 47
t_{freefall}, 15, 47
thermische Geschwindigkeit, 44
thermische Zeitskala, 47, 80
thermischer Ausdehnungskoeffizient, 20
Titan, 158, 161
t_{Kelvin}, 15, 47, 50, 51
Trägheitsbereich, 17
t_{rad}, 15, 47, 50, 51, 72
$t_{\mathrm{rad,Edd}}$, 15, 48
$t_{\mathrm{rad,thick}}$, 15, 48
$t_{\mathrm{rad,thin}}$, 15, 48
$t_{\mathrm{rad,vis}}$, 50, 51
transversale Mode, 69
t_{th}, 15, 49–51
t_{turb}, 15, 49
t_{turnover}, 15, 47
turbulente Dissipation, 19
turbulente Kaskade, 17, 55
turbulente Mischung, 19
turbulente viskose Zeitskala, 15, 49
turbulente Viskosität, 9, 13, 18, 61
Turbulenz, 4, 17, 52–54, 85, 89, 91, 107, 111, 151
Turnover-Zeitskala, 15, 47
t_{vis}, 15, 49–51

U, 15, 81
$\hat{u}$, 15, 64
u, 15
u_{atom}, 15
Überschall, 45, 167
Umwälzzeitskala, 15, 47, 101, 123

$\hat{v}$, 15, 62
v, 15
V_{el}, 15
Verhältnis spezifischer Wärmen, 13, 24
vertical stacking, 89
vertikale Wellenzahl, 70
viskose Zeitskala, 15, 49–51, 61
Viskosität, 49, 61, 99, 117
  radiative, 52
  Schock-, 13, 17
  turbulente, 9, 13, 18, 61
v_{th}, 40, 41

W, 15, 81
Wasserstoffkonvektionszone, 39, 45, 77, 97–99, 157, 158
Weißer Zwerg, 39, 72, 86–91, 142
Wellengleichung, 60, 62, 63
Wellenvektor, 13, 64

χ, 15
x, 15
x_{H}, 15, 40, 41
x_{He}, 15, 41
χ_{rad}, 16
χ_{ρ}, 16
χ_T, 16

z, 16
Zeitskala, 46–49, 122–124
Zustandsgleichung, 10, 11, 25, 27, 37, 78, 81
  für ideale Gase, 20
2D, 9, 85, 107, 150
ZZ Ceti-Instabilitätsstreifen, 169, 172

13 Danksagung

Meinem Doktorvater Prof. Dr. Hartmut Holweger danke ich für die interessante Themenstellung, für die fortlaufende Betreuung und Ermunterung während der Arbeit.

Bei allen wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Mitgliedern des Institutes bedanke ich mich für das gute Arbeitsklima, die Hilfsbereitschaft bei allen technischen und weniger technischen Fragen, viele anregende Diskussionen und nicht zuletzt die gute Verpflegung.

Besonderer Dank gilt Matthias Steffen, der mir bei allen Problemen mit den Tücken seines Strahlungs-Hydrodynamik-Programms hilfreich zur Seite gestanden hat und sich von meinen vielen Fragen fast nie genervt zeigte. Außerdem danke ich ihm für die kritische Durchsicht eines großen Teils meiner Arbeit. Ohne ihn würde sie noch viel mehr Fehler enthalten.

Unserem zur Zeit auswärtigen Arbeitsgruppenmitglied Hans-Günter Ludwig danke ich für seine Unterstützung, seine (ab und zu) messerscharfe Kritik und die jeweils auf den neuesten Stand gebrachten Opazitätstabellen.

Meinen Zellengenossen Inga Rentzsch-Holm und Carsten Krege danke ich für das gute Raumklima, die Kekse und für die Überlassung des Terminals in den letzten kritischen Wochen.

Die Strahlungs-Hydrodynamik-Rechnungen wurden auf den verschiedenen Rechnern der Firma CRAY der Rechenzentren in Kiel und Berlin durchgeführt, deren Besatzungen ich hiermit danken möchte, insbesondere auch für die Betreuung bei der Benutzung des neuen Videolabors. Die weiteren Auswertungen wurden z.T. auf der VAX des Kieler Rechenzentrums, zuletzt aber hauptsächlich auf den Sun-Workstations des Instituts für Astronomie und Astrophysik vorgenommen, bei deren Pfleger Günter Jonas ich mit auf diesem Wege bedanken möchte.

Finanziert wurde ich zwei Jahre lang durch ein Promotionsstipendium nach dem Landesgesetz zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses und danach aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft, was ich hiermit dankend anerkenne.

Reisemittel der DFG und Zuschüsse des „HAO Visitors and Graduate Students Committee“ ermöglichten mir einen einmonatigen Gastaufenthalt am High Altitude Observatory in Boulder, Colorado, USA. Den Institutsmitgliedern möchte ich für die Gastfreundschaft und viele interessante Diskussionen danken. Meinem Gastgeber Paul Charbonneau danke ich insbesondere für die Überlassung seines DIFUZ1D-Programms.

Ganz besonders sei an dieser Stelle meinen lieben Eltern gedankt für die fortdauernde Unterstützung während des Studiums.

Bernd Freytag

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Abhandlung — abgesehen von der Beratung durch Prof. Dr. H. Holweger — nach Form und Inhalt eigenständig angefertigt habe. Die Arbeit ist bisher noch nicht veröffentlicht.

Kiel, den ....

Bernd Freytag